МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И
МОЛОДЁЖНОЙ ПОЛИТИКИ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ
«КРАСНОДАРСКИЙ МОНТАЖНЫЙ ТЕХНИКУМ»
(ГБПОУ КК «КМТ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

по выполнению практических занятий

учебная дисциплина ЕН. 01 Математика

Специальность 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений

2019-2020

Рассмотрена
на заседании МК МОЕН
____

Протокол от «____»________20___г. №___

Председатель_________ /_______________

Утверждаю
Заместитель директора по учебно-методической работе
ГБПОУ КК «КМТ»
______________/ ____________/

«_____»_____________ 20___ г.

Методические рекомендации по выполнению практических занятий предназначены для закрепления теоретических знаний и приобретение необходимых практических навыков и умений по программе учебной дисциплины ЕН.01 Математика ,составлены в соответствии с учебным планом и рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01 Математика по специальности 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений

среднего профессионального образования

Организация-разработчик: - государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Краснодарского края «Краснодарский монтажный техникум»

Составитель: *Пономарёва Е.Р, преподаватель математики ГБПОУ КК «КМТ»*

Рецензенты:

Пояснительная записка

Методические рекомендации по выполнению практических занятий по учебной дисциплине ЕН01 Математикасоставлены в соответствии с учебным планом и рабочей программой дисциплины по специальности 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений

среднего профессионального образования для студентов очной формы обучения.

В соответствии с рабочей программой на изучение учебной дисциплины предусмотрено 76 часов, из которых 34 часа на проведение практических занятий.

Цель проведения практических занятий: формирование практических умений, необходимых в последующей профессиональной и учебной деятельности.

Задачи:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление полученных теоретические знания по конкретным темам;
- формирование умения применять полученные знания на практике;
- выработка при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

В программу включено содержание, направленное на формирование у обучающихся общих и профессиональных компетенций, необходимых для качественного освоения ОПОП СПО.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен уметь: решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

Перечень практических и/или лабораторных занятий 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений

Наименование раздела (темы)	Практическоезанятие	Содержание практического занятия	Кол-во часов
Раздел 1 Элементы аналитической геометрии	**Практическое занятие №** 1 Вычисление скалярного произведения векторов, модуля вектора и угла между векторами.		2
	Практическое занятие №2 Определение расстояния между точками и координат середины отрезка.		2
	Практическое занятие №3 Определение взаимного расположения прямых и угла между ними, расстояния от точки до прямой.		2
	Практическое занятие №4 Построение кривых второго порядка и вычисление их основных элементов.		2
	Практическое занятие №5 Приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду и их построение.		2
Раздел 2 Вычисление площадей и объёмов	**Практическое занятие №6** Расчет площадей строительных конструкций.		2
	Практическое занятие № 7 Вычисление объёмов деталей строительных конструкций, определениеобъема земляных работ.		2
Раздел 3 Дифференциальное и интегральное исчисление	**Практическое занятие № 8** Вычисление пределов последовательностей и функций с применением различных методов.		2
	Практическое занятие № 9Исследование функции на непрерывность, определение точек разрыва.		2
	Практическое занятие №		2

	10Составление уравнения касательной и нормали. Определение экстремумов функции.		
	Практическое занятие № 11Вычисление наибольшего и наименьшего значений функции на заданном отрезке.		2
	Практическое занятие № 12Вычисление неопределённых интегралов методом замены переменных и с помощью интегрирования по частям.		2
	Практическое занятие № 13Построение криволинейной трапеции.		2
	Практическое занятие № 14 Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и вычислению объёмов.		2
Раздел 4 Основы теории вероятностей и математической статистики	**Практическое занятие № 15**Вычисление вероятностей сложных событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей.		2
	Практическое занятие № 16 Формула полной вероятности и формула Бернулли.		2
	Практическое занятие № 17Составление статистического распределения выборки, построение полигона и гистограммы.		2
ИТОГО			34

Общие методические рекомендации и рекомендации по выполнению практических/занятий

При выполнении каждой практической работы необходимо придерживаться следующих правил:

1. Внимательно прочитайте инструкцию по выполнению практической работы.
2. Пользуясь рекомендациями к работе, выполните предложенные задания.
3. Оформите письменный отчет по выполненной практической работе.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ПРАКТИЧЕСКИХ/ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие 1

1.Название темыВычисление скалярного произведения векторов, модуля вектора и угла между векторами.

2.Учебные цели: отработка умений и навыков выполнения действий над векторами

3. Продолжительность занятия: 2 часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

5. Литература, информационное обеспечение

1 Башмаков М.И. Математика: учеб.для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015.
2 Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб.для студ. учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015
3 Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб.для учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

Основные теоретические сведения и примеры решения заданий

Пусть в трехмерном пространстве заданы векторы $\overline{a}\{x_1;y_1;z_1\},\overline{b}\{x_2;y_2;z_2\},\overline{c}\{x_3;y_3;z_3\}$ своими координатами.

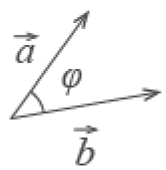
1). ***Сложение*** двух векторов производится поэлементно, то есть если $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$, то в координатной форме записывается:

$$c\{x_3; y_3; z_3\} = \{x_1; y_1; z_1\} + \{x_2; y_2; z_2\} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$$

2) Умножение вектора на число.

В случае n-мерного пространства произведение вектора a = $\{a_1 ; a_2; ... ; a_n\}$ и числа k можно найти воспользовавшись следующей формулой:
$k \cdot a = \{k \cdot a_1; k \cdot a_2; ... ; k \cdot a_n\}$
Пример 1. Найти произведение вектора $\bar{a}$= {1; 2} на 3.
Решение: $3\bar{a} = \{3 \cdot 1; 3 \cdot 2\} = \{3; 6\}$.
3). Координаты вектора.
Вектор AB заданный координатами точек $A(A_x ; A_y ; A_z)$ и $B(B_x ; B_y ; B_z)$ можно найти воспользовавшись следующей формулой
$AB = \{B_x - A_x ; B_y - A_y ; B_z - A_z\}$
Пример 2. Найти координаты вектора AB, если A(1; 4; 5), B(3; 1; 1).
Решение: AB = {3 - 1; 1 - 4; 1 - 5} = {2; -3; -4}.
Скалярным произведением векторов называется произведение длин векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \bullet |\vec{b}| \bullet \cos\varphi$$



Из формулы для скалярного произведения можно найти угол между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \bullet |\vec{b}|} = \frac{x_a \bullet x_b + y_a \bullet y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \bullet \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

Пример 3. Найти угол между векторами a = {3; 4; 0} и b = {4; 4; 2}.
Решение: Найдем скалярное произведение векторов:
$a \cdot b = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 12 + 16 + 0 = 28$.
Найдем модули векторов:
|a| = √32 + 42 + 02 = √9 + 16 = √25 = 5
|b| = √42 + 42 + 22 = √16 + 16 + 4 = √36 = 6
Найдем угол между векторами:

$$\cos\alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{28}{5 \cdot 6} = \frac{14}{15}$$

Контрольные вопросы

1. Как найти сумму векторов заданных координатами?
2. Как найти разность векторов заданных координатами?
3. Как найти произведение вектора на число?

4. Как вычислить координаты середины отрезка?
5. Как вычислить координаты вектора?
6. Как найти длину вектора?

6.Задания для самостоятельной работы

№ п/п	Название операции	Формулы
1	Найти сумму векторов	$\vec{a}\{1;-2;3\}$, $\vec{b}\{4;0;-1\}$ $\vec{a}+\vec{b}\{x_1+x_2\ ;\ y_1+y_2\ ;\ z_1+z_2\}$
2	Найти разность векторов	$\vec{a}\{4;1;-3\}$, $\vec{b}\{0;-5;2\}$ $\vec{a}-\vec{b}\{x_1-x_2\ ;\ y_1-y_2\ ;\ z_1-z_2\}$
3	Найти произведение вектора на число	$\vec{a}\{-1;3;1\}$, δ – число $\delta=-3$ $\delta\vec{a}\{\delta\cdot x;\ \delta y\ ;\delta z\}$
4	Найти координаты вектора	Точка А$(5;0;-3)$. Точка В (-1;4;-7) Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Из координат конца вычислить координаты начала вектора $\overrightarrow{AB}\ \{x_2-x_1\ ;y_2-y_1;\ z_2-z_1\}$
5	Вычислить скалярное произведение векторов	$\vec{a}\{-2;3;7\}$, $\vec{b}\{-9;0;2\}$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$
6	Найти косинус угла между векторами	$\vec{a}\{2;0;1\}$, $\vec{b}\{-3;1;2\}$ $\cos\alpha=\dfrac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$
7	При каких значениях m и n векторы коллинеарны?	$\vec{a}\{m;3;1\}$, $\vec{b}\{1;n;2\}$ $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}=k$
8	Проверьте перпендикулярность векторов	$\vec{a}\{-4;0;1\}$, $\vec{b}\{2;7;8\}$ $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=0$ - условие перпендикулярности векторов

8.Критерии оценки

Оценка	**Критерии оценки**
отлично	работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы
хорошо	работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, получены правильные ответы на контрольные вопросы
удовлетворительно	решено первое задание и пример а) из второго задания, получены правильные ответы на контрольные вопросы

неудовлетворительно	Не решено первое задание и пример а) из второго задания, не получены правильные ответы на контрольные вопросы

9.Форма отчета: Выполните задания на листах После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

9. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 2

1.Название темыОпределение расстояния между точками и координат середины отрезка.

2.Учебные цели: отработка умений и навыков выполнения действий над векторами

3. Продолжительность занятия: 2 часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

5. Литература, информационное обеспечение

1 Башмаков М.И. Математика: учеб.для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015.
2 Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб.для студ. учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015
3 Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб.для учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

Основные теоретические сведения

1)Длина вектора.

Если даны две точки пространства $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то **длину** отрезка AB можно вычислить по формуле $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Пример 1

Даны точки $A(-3; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти длину отрезка AB.

Решение: по соответствующей формуле:
$|AB| = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

Ответ: $|AB| = 4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8{,}94$ ед.

2) Формула вычисления координат середины отрезка с концами А(x_a, y_a, z_a) и В(x_b, y_b, z_b) в пространстве:

$$x_c = \frac{x_a + x_b}{2} \quad y_c = \frac{y_a + y_b}{2} \quad z_c = \frac{z_a + z_b}{2}$$

Пример 1.

Найти координаты точки С, середины отрезка АВ заданного точками A(-1, 3) и B(6, 5).

Решение.

$$x_c = \frac{x_a + x_b}{2} = \frac{-1 + 6}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$y_c = \frac{y_a + y_b}{2} = \frac{3 + 5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Ответ: C(2.5, 4).

Задания для самостоятельной работы:

1. Вычислить координаты середины отрезкаТочка А$(1;2;-3)$. Точка В (-3;4;-1) .Точка С- середина отрезка АВ

2. Найти длину вектора $\vec{a}\{3,-2,0\}$

Контрольные вопросы

1 Как вычислить длину вектора?
2 Как найти координаты середины отрезка?

8.Критерии оценки

Оценка	Критерии оценки
отлично	работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы
хорошо	работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, получены правильные ответы на контрольные вопросы
удовлетворительно	решено первое задание и пример а) из второго задания, получены правильные ответы на контрольные вопросы
неудовлетворительно	Не решено первое задание и пример а) из второго задания, не получены правильные ответы на контрольные вопросы

9.Форма отчета: Выполните задания на листах После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.
9. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 3

1.Название темыОпределение взаимного расположения прямых и угла между ними, расстояния от точки до прямой.

2.Учебные цели: отработка умений и навыков построения кривых второго порядка и вычисление их основных элементов

3. Продолжительность занятия: 2 часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

5. Литература, информационное обеспечение

1 Башмаков М.И. Математика: учеб.для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015.
2 Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб.для студ. учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015
3 Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб.для учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

Основные теоретические сведения

Расстояние в геометрии традиционно обозначают греческой буквой «ро», например: $\rho(M;d)$ – расстояние от точки «эм» до прямой «дэ».

Расстояние от точки $M(x_0;y_0)$ до прямой $d: Ax+By+C=0$, заданной в декартовой системе координат, выражается формулой

$$\rho(M;d)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

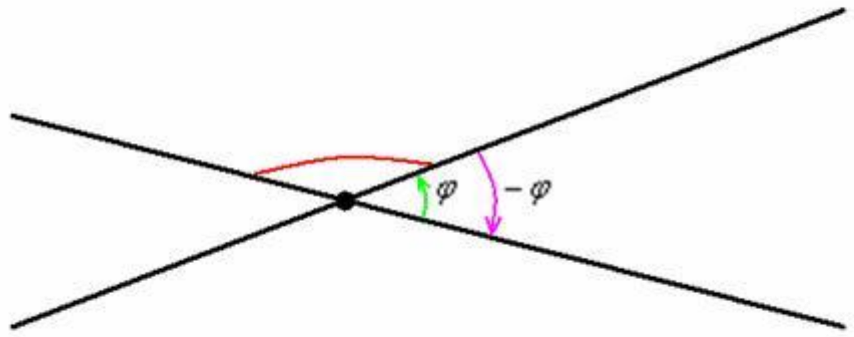
Пример 8

Найти расстояние от точки $M(-1;1)$ до прямой $d: 3x+4y-12=0$

Решение: всё что нужно, это аккуратно подставить числа в формулу и провести вычисления:

$$\rho(M;d)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|3\cdot(-1)+4\cdot 1-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-3+4-12|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|-11|}{\sqrt{25}}=\frac{11}{5}$$

Ответ: $\rho(M;d)=\frac{11}{5}=2,2$ ед.



В геометрии за угол между двумя прямыми принимается МЕНЬШИЙ угол, из чего автоматически следует, что он не может быть тупым. На рисунке угол, обозначенный красной дугой, не считается углом между пересекающимися прямыми. А считается таковым его «зелёный» сосед φ или противоположно ориентированный «малиновый» угол $-\varphi$.

Если прямые перпендикулярны, то за угол между ними можно принимать любой из 4 углов.

Чем отличаются углы φ и $-\varphi$? Ориентацией. Во-первых, принципиально важным является направление «прокрутки» угла. Во-вторых, отрицательно ориентированный угол записывается со знаком «минус», например, если $\varphi = 30°$, то $-\varphi = -30°$.

Пример:

Найти угол между прямыми $d_1: 2x-3y=0, \quad d_2: x+3y-7=0$

Решение

Если прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом $\begin{matrix} d_1: y=k_1x+b_1 \\ d_2: y=k_2x+b_2 \end{matrix}$ (декартовы координаты) и не перпендикулярны, то ориентированный угол φ между ними можно найти с помощью формулы: $tg\varphi = \dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$

Условие перпендикулярности прямых выражается равенством $1+k_1k_2=0$, откуда, кстати, следует очень полезная взаимосвязь угловых коэффициентов перпендикулярных прямых: $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$, которая используется, в частности при нахождении уравнения нормали.

Алгоритм решения похож на предыдущий пункт. Но сначала перепишем наши прямые в нужном виде:

$$d_1: 2x-3y=0 \Rightarrow 3y=2x \Rightarrow y=\frac{2}{3}x$$

$$d_2: x+3y-7=0 \Rightarrow 3y=-x+7 \Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$$

Таким образом, угловые коэффициенты: $k_1=\dfrac{2}{3}, \quad k_2=-\dfrac{1}{3}$

1) Проверим, будут ли прямые перпендикулярны: $1+k_1k_2 = 1+\dfrac{2}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 1-\dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{9} \neq 0$, значит, прямые не перпендикулярны.

2) Используем формулу:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}}{\frac{7}{9}} = \frac{-1}{\frac{7}{9}} = -\frac{9}{7}$$

Ответт: $\varphi = -arctg\frac{9}{7} \approx -0{,}91\text{ рад.} \approx -52^\circ$

Задания для самостоятельной работы:

1. Даны координаты точек *A*(4, 1), *B*(2, −1), *C*(−3, 5). Найти расстояние от точки *A* до прямой *BC*.
2. Даны координаты точек А(4, 1), В(2, −1), С(−3, 5). Найти угол между медианой и высотой, проведенными из вершины А.

Контрольные вопросы

1. Как вычислить расстояние от точки до прямой?
2. Как найти угол между прямыми?

8.Критерии оценки

Оценка	Критерии оценки
отлично	работа выполнена полностью, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала), получены правильные ответы на контрольные вопросы
хорошо	работа выполнена полностью, допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, получены правильные ответы на контрольные вопросы
удовлетворительно	решено первое задание и пример а) из второго задания, получены правильные ответы на контрольные вопросы
неудовлетворительно	Не решено первое задание и пример а) из второго задания, не получены правильные ответы на контрольные вопросы

9.Форма отчета: Выполните задания на листах После выполнения работы ответьте письменно на контрольные вопросы, размещенные после заданий.

10. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 4

1.Название темыПостроение кривых второго порядка и вычисление их основных элементов.

2.Учебные цели: отработка умений и навыков построения кривых второго порядка и вычисление их основных элементов

3. Продолжительность занятия: 2 часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

5. Литература, информационное обеспечение

1 Башмаков М.И. Математика: учеб.для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015.

2 Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб.для студ. учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

3 Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб.для учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

Основные теоретические сведения

Уравнение первой степени относительно переменных x и y, то есть уравнение вида $Ax + By + C = 0$ при условии, что коэффициенты A и B одновременно не равны нулю, называетсяобщим уравнениемпрямой.

Уравнение вида $n \cdot (r - r_0) = 0$ называетсявекторным уравнениемпрямой. Если его переписать в координатной форме, то получится уравнение
$A(x - x_0) + B(y - y_0 = 0)$.

Каноническое уравнение прямой записывается в следующем виде
$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$, где m и n - координаты направляющего вектора прямой.

Уравнение прямой в отрезках на осяхимеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где a и b - соответственно абсцисса и ордината точек пересечения прямой с осями Ox и Oy.

Уравнение прямой с угловым коэффициентомимеет вид $y = kx + b$, где $k = tg\alpha$ - угловой коэффициент, равный тангенсу угла наклона прямой к оси Ox, а b - ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_A; y_A)$ в заданном направлении, имеет вид $y - y_A = k \cdot (x - x_A)$, где $k = tg\alpha$ - угловой коэффициент прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$, имеет вид $y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A)$. Угловой коэффициент прямой, проходящей через точки A и B, находится из соотношения $k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Окружностьюназывается множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки этой плоскости, называемой центром.

Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r имеет вид $x^2 + y^2 = r^2$.

Уравнение окружности с центром в точке $O_1(a; b)$ и радиусом r имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Уравнение окружности в общем виде записывается так: $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$, где A, B, C и D - постоянные коэффициенты.

Эллипсомназывается множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная $(2a)$, большая расстояния между фокусами $(2c)$.

Уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b)$, где a - длина большей полуоси; b - длина малой полуоси.

Гиперболойназывается множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная $(2a)$, меньшая расстояния между фокусами $(2c)$.

Уравнение гиперболы, фокусы которого лежат на оси Ox, имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a - длина действительной полуоси; b - длина мнимой полуоси.

Параболойназывается множество точек на плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой.

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Ox и ветви направлены вверх, имеет вид $x^2 = 2py$, где $p > 0$ (параметр параболы) – расстояние от фокуса до директрисы. Уравнение ее директрисы $y = -\frac{p}{2}$.

<u>Пример.</u> Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде:

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0.$$

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду, указанному выше в п.9. Для этого выделим полные квадраты:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2{,}5y - 2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2{,}5y + 25/16 - 25/16 - 2 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 - 25/16 - 6 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 = 121/16$$

Отсюда находим O(2; -5/4);   R = 11/4.

<u>Пример.</u> Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

1) Координаты нижней вершины: x = 0; y^2 = 16; y = -4.
2) Координаты левого фокуса: $c^2 = a^2 - b^2$ = 25 – 16 = 9; c = 3; F_2(-3; 0).
3) Уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-0}{-3-0} = \frac{y+4}{0+4}; \qquad \frac{x}{-3} = \frac{y+4}{4}; \qquad 4x = -3y - 12; \qquad 4x + 3y + 12 = 0$$

<u>Пример.</u> Составить уравнение эллипса, если его фокусы F_1(0; 0), F_2(1; 1), большая ось равна 2.

Уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Расстояние между фокусами: 2c = $\sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$, таким образом, $a^2 - b^2 = c^2$ = ½

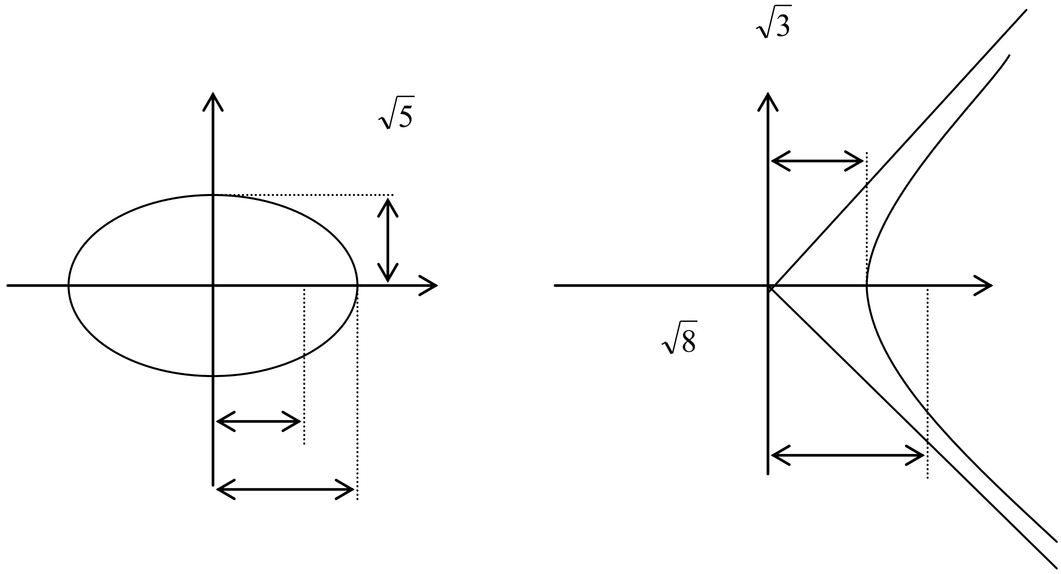
по условию 2a = 2, следовательно a = 1, b = $\sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1 - 1/2} = \sqrt{2}/2$.

Итого: $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1/2} = 1$.

<u>Пример.</u> Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих вершинах и фокусах эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Для эллипса: $c^2 = a^2 - b^2$.

Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2$.



Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Задания для самостоятельного решения:

1. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.
2. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Контрольные вопросы

1. Что называется кривыми второго порядка?
2. Какие кривые второго порядка вы знаете?

7.Критерии оценки

Оценка	Критерии оценки
отлично	студент имеет глубокие знания учебного материала по теме практической работы, показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, самостоятельно выполнил все рекомендации по выполнению практической работе, смог ответить на контрольные вопросы, даёт правильный алгоритм решения задачи, выполнены поставленные цели работы
хорошо	студент показал знание учебного материала, допускает небольшие неточности при выполнении расчетов, смог ответить почти полно на все контрольные вопросы
удовлетворительно	студент в целом освоил материал практической работы, но затрудняется с выполнением всех заданий практической работы без помощи преподавателя, ответил не на все контрольные вопросы
неудовлетворительно	студент имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практическойработы, не может самостоятельно выполнить задания практической работы, не раскрыл содержание контрольных вопросов

8.Форма отчета: Выполните задания на листах

9. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 5

1.Название темыПриведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду и их построение.

2.Учебные цели: отработка умений и навыков построения кривых второго порядка и приведению их к каноническому виду

3. Продолжительность занятия: 2 часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

5. Литература, информационное обеспечение

1 Башмаков М.И. Математика: учеб.для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015.
2 Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб.для студ. учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015
3 Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб.для учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

Основные теоретические сведения

Пример.

Пусть дано уравнение

$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

определяющее кривую второго порядка.

Рассмотрим произведение А*С:

1. Если А*С> 0, то кривая определяет эллипс, может быть окружность;
2. Если А*С< 0, то кривая определяет гиперболу;
3. Если А*С= 0, то кривая определяет параболу.

Приводим данное уравнение к каноническому виду путем выделения полного квадрата.

Исследуйте уравнение $4x^2+9y^2-8x -36y+4=0$ и определите вид полученной кривой

Сначала определяем тип кривой, находим произведение А*С

А*С=4*9=36>0, следовательно, искомая кривая – эллипс.

Выделяем полный квадрат:

$4x^2+9y^2-8x -36y+4=0$

$4x^2-8x+9y^2-36y+4=0$

$(2x)^2-2*2x*2 +4-4+(3y)^2-2*3y*6+36-36+4=0$

$(2x-2)^2+(3y-6)^2-36=0$

$4(x-1)^2+9(y-2)^2=36$

Разделим обе части на 36:
(x-1)^2/9+(y-2)^2/4=1
Получилось каноническое уравнение эллипса.

Задания для самостоятельного решения:

1. $x^2-y^2-16=0$
2. $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$
3. $9x^2+4y^2-18x-8y-23=0$
4. $4x^2+9y^2-18y-27=0$
5. $9x^2-4y^2+8y-40=0$
6. $x^2+y^2+2x-2y-2=0$
7. $4x^2+y^2-8x+2y+1=0$

Контрольные вопросы

1. Что называется кривыми второго порядка?
2. Какие кривые второго порядка вы знаете?
3. Как привести уравнение к каноническому виду?

7.Критерии оценки

Оценка	Критерии оценки
отлично	студент имеет глубокие знания учебного материала по теме практической работы, показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, самостоятельно выполнил все рекомендации по выполнению практической работе, смог ответить на контрольные вопросы, даёт правильный алгоритм решения задачи, выполнены поставленные цели работы
хорошо	студент показал знание учебного материала, допускает небольшие неточности при выполнении расчетов, смог ответить почти полно на все контрольные вопросы
удовлетворительно	студент в целом освоил материал практической работы, но затрудняется с выполнением всех заданий практической работы без помощи преподавателя, ответил не на все контрольные вопросы
неудовлетворительно	студент имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практическойработы, не может самостоятельно выполнить задания практической работы, не раскрыл содержание контрольных вопросов

8.Форма отчета: Выполните задания на листах

9. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 6

1.Название темыРасчет площадей строительных конструкций.

2.Учебные цели: отработка умений и навыков расчета площадей строительных конструкций

3. Продолжительность занятия: 2 часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

5. Литература, информационное обеспечение

1 Башмаков М.И. Математика: учеб.для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015.

2 Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб.для студ. учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

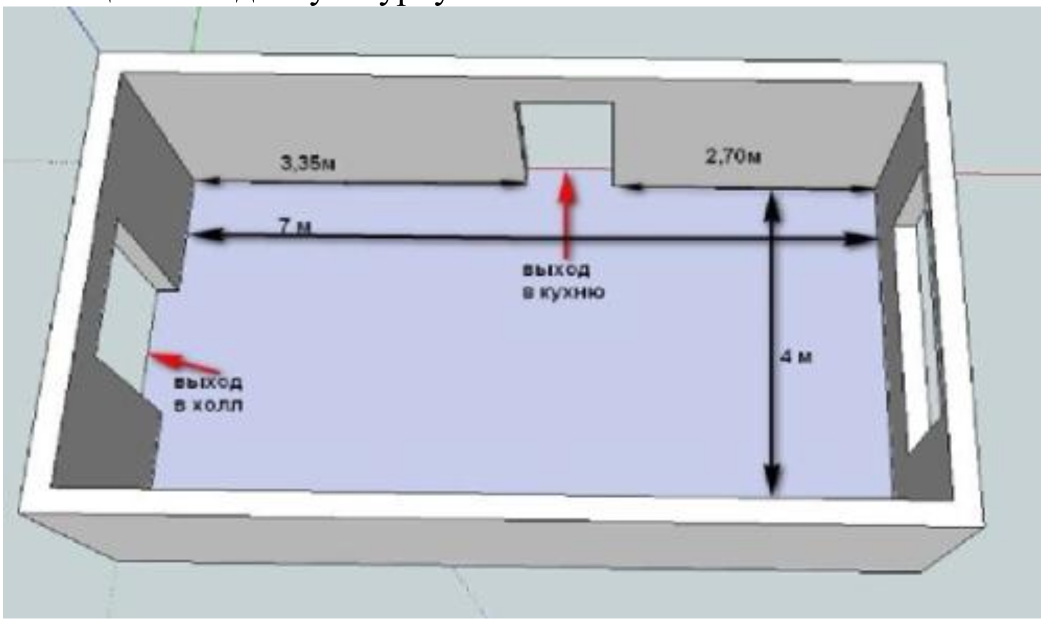
3 Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб.для учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

6.Методические рекомендации по выполнению работы: Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

Основные теоретические сведения

Пример 1

Вычислите площадь поверхности стен данной комнаты, если площадь окна и дверей составляет 8.5% от всей площади стен. Расчет площади поверхности помещений под штукатурку и обои.



Решение

Чтобы узнать количество обоев для оклейки стен, проводим расчеты по формуле: (a+b) x 2 x h, где a и b длина стен,h — высота комнаты. Пример. Комната имеет длину стен 5 м и ширину 3,5 м, высота составляет 2,5 м.

Расчет показывает (5+3,5) x 2×2,5= 42,5 кв. м, округленно 43 кв. м без учета площади окон и дверей. Если обои с рисунком, требующим подгонки, то площадь окон и дверей не принимаем в расчет. Их площадь уйдет на подгонку рисунка. Если обои не требуют подгонки, то площадь окон и дверей вычитаем из общей площади стен. Зная площадь стен, рассчитываем количество рулонов обоев. Каждый рулон имеет маркировку, указывающую общую длину и ширину рулона. Решили закупить рулоны обоев длиной 10,05 м и шириной 1,05 м. По 5 см дается на припуски при наклейке обоев внахлест. Высота потолка в комнате 2,5 м, но длину одного полотнища мы увеличиваем на 10 см для выравнивания и получаем рабочую длину обоины 2,6 м. Рассчитываем количество полотнищ с одного рулона 10,05:2,6 = 3,8 штук. Количество целых полотен умножаем на рабочую длину и ширину обоины (3×2,6×1,05) и получаем с одного рулона 8 кв. м полезной площади. Площадь комнаты (43 кв. м) делим на 8 кв. м и получаем необходимое количество рулонов с запасом (если не учитывали площадь окон и дверей). Проводим подсчет 43:8= 5,3 рулона. Округляем и закупаем для оклейки стен 6 рулонов обоев. Расчет площади поверхности помещений под штукатурку и обои.

Пример 2

Трапециевидные скаты имеют следующие параметры: одна сторона 10 м, другая 7 м, высота 3м. Треугольные скаты: две стороны по 3,34 м, одна сторона 7м. Высота треугольника 4,8 м.

Решение

Площадь трапеции находится следующим образом: суммируем длину горизонтальных сторон, делим на 2, умножаем на высоту. То есть, в нашем случае: S=(10 +7)/2 x 3 = 25,5 кв.м Далее вычисляем площадь треугольных скатов. S= (7 x 4,8)/ 2= 16,8 Завершающим этапом становится суммирование всех площадей: S = 25,5×2 + 16,8×2 = 83,7кв.м

Задания для самостоятельного решения:

1. Пол музыкального зала, имеющего форму прямоугольника со сторонами 9,5м и 8 м, требуются покрыть паркетом из прямоугольных дощечек со сторонами 0,05м и 0,3м. Сколько потребуется таких дощечек?

2.Имеется платформа формы усеченной пирамиды где её основания являются квадраты со стороной 20 м и 5 м, высотой боковой грани 3 м. Найти площадь поверхности платформы.

3.Какой площади должен быть медицинский кабинет, если его минимальный объем 15 м^3, а высота - 2,5м?

4.Бак с крышкой имеет форму правильной четырёхугольной призмы со стороной 2м и высотой, равной диагонали основания. Определите площадь

для покраски этого бака.
5.Сколько листов жести длиной 2м, шириной 1м пойдёт на крышу беседки, имеющей форму пирамиды с квадратным основанием, если сторона основания равна 2,5 м, длина ската крыши 3м, на швы и обрезки пойдёт 0,5 листа?

Контрольные вопросы

1. Какие основные формулы для расчета площадей вы знаете?
2. Какова правильная последовательность выполнения расчетов строительных конструкций?

7.Критерии оценки

Оценка	Критерии оценки
отлично	студент имеет глубокие знания учебного материала по теме практической работы, показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, самостоятельно выполнил все рекомендации по выполнению практической работе, смог ответить на контрольные вопросы, даёт правильный алгоритм решения задачи, выполнены поставленные цели работы
хорошо	студент показал знание учебного материала, допускает небольшие неточности при выполнении расчетов, смог ответить почти полно на все контрольные вопросы
удовлетворительно	студент в целом освоил материал практической работы, но затрудняется с выполнением всех заданий практической работы без помощи преподавателя, ответил не на все контрольные вопросы
неудовлетворительно	студент имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практическойработы, не может самостоятельно выполнить задания практической работы, не раскрыл содержание контрольных вопросов

8.Форма отчета: Выполните задания на листах

9. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое работа 7

1.Название темы: Вычисление объёмов деталей строительных конструкций, определение объема земляных работ.

2.Учебные цели: научиться объёмы деталей строительных конструкций, определятьобъем земляных работ

3. Продолжительность занятия: 2 часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал: рабочая тетрадь, ручка, методические рекомендации по выполнению практической работы, справочная литература**.**

5. Литература, информационное обеспечение

1 Башмаков М.И. Математика: учеб.для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015.

2 Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб.для студ. учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

3 Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб.для учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1. Ознакомиться с теоретическим материалом по практической работе.
2. Рассмотрите образцы решения задач по теме.
3. Выполнить предложенное задание согласно варианту по списку группы.
4. Изучить условие заданий для практической работы и выполнить её.

Основные теоретические сведения

Определение строительного объема здания

Строительный объём здания с чердачным перекрытием (V_1) определяется по формуле:

$V_1 = S_1 * H$

гдеS_1 – площадь горизонтального сечения здания по внешнему обводу на уровне первого этажа выше цоколя;

H – высота по разрезу от отметки чистого пола первого этажа до верха засыпки чердачного перекрытия.

Строительный объём здания без чердачного перекрытия (V2) определяется по формуле:

$V_2 = S_2 * L$

где S_2 – площадь вертикального разреза здания по наружному обводу стен (верхнее очертание кровли и верх чистого пола первого этажа);

L – длина здания по наружным граням торцевых стен на уровне первого этажа выше цоколя.

В обоих случаях из объёма здания исключается объём проездов, но добавляются объёмы лоджий, ниш, эркеров, веранд, тамбуров, световых фонарей. В то же время к объёму здания не добавляется объём портиков, балконов (открытых и крытых).

Если здание имеет разные по площади этажи, то для каждой части здания строительные объёмы определяются отдельно, а затем суммируются.
Чердачное помещение, приспособленное для технических целей, в объём здания не включается. Объём мансардного помещения учитывается.
Строительный объём здания с подвалом или полуподвалом определяется суммарными данными об объёме надземной и подземной его частей.
Строительный объём подземной части определяется по формуле:

$$V_3 = S_3 * H_1$$

где S_3 – площадь горизонтального сечения подвала (полуподвала), измеренная на уровне первого этажа выше цоколя;

H_1 – высота от отметки верха чистого пола первого этажа.

Объёмы земляных работ определяются по проектным данным с учётом классификации грунтов, крутизны откосов и глубины заложения подошвы фундамента (h). Глубина котлована или траншей для фундаментов стен, оборудования, колонн и т.д. должна приниматься по проектным отметкам от подошвы заложения фундамента (или подушки под фундамент) до чёрной отметки земли (чёрная отметка земли – отметка, существующая до начала работ; красная отметка земли – планировочная отметка).
Для определения объёма отрывки котлованов (траншей) целесообразно предварительно схематично (с размерами) изобразить планы и сечения разработок.

Для траншеи площадь поперечного сечения (прямоугольник или трапеция) умножается на длину. Длина наружных траншей принимается по осям наружных фундаментов; длина внутренних траншей – между внутренними гранями наружных траншей (при траншеях с откосами принимается ширина до средней линии).
При определении объёма котлована с вертикальными стенками площадь горизонтального сечения котлована умножается на глубину отрывки. Для котлована с откосами объём подсчитывается по формуле усечённой (перевёрнутой) пирамиды:

$$V = h * (a * b) + (a + b) * c + \frac{4}{3} * c)$$

Где: a и b – размеры основания котлована в плане; c – размер основания треугольника откоса;

h – глубина промерзания + 20см; h/c - крутизна откоса;

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Вырыли котлован в виде усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны радиус 20м и 40м,глубиной 5 м. Найти объём вынутого грунта.
2. Для приготовления раствора заливки фундамента привезли 92м3 цемента, 60м3 мелкого заполнителя и 80 м3 крупного заполнителя, распределили равными кучками в виде конуса высотой 3м и радиусом 2м. Определить количество кучек нужных для приготовления раствора.
3. Нужно рассчитать сколько понадобится готовой цементной смеси на погреб состоящий из четырех стен длиной 4 м, высотой 3 м и толщиной 30 см.

4. В цилиндрический сосуд налили 3 000 см3 воды. Уровень воды при этом достиг высоты 20 см. В жидкость полностью нагрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 3 см. Чему равен объём детали.
5. Найдите объём воды в бассейне, если его длина 10м, ширина 6м, уровень воды – 2м.
6. Деталь имеет форму усеченного конуса, с радиусом меньшего основания 15см и высотой 10 см. Стороны меньшего основания относятся как 1:2.Найдите объём детали.

Контрольные вопросы

1. Как выполняется расчет строительных конструкций?
2. Как выполняется расчет земляных работ?

7.Критерии оценки

Оценка	Критерии оценки
отлично	студент имеет глубокие знания учебного материала по теме практической работы, показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, самостоятельно выполнил все рекомендации по выполнению практической работе, смог ответить на контрольные вопросы, даёт правильный алгоритм решения задачи, выполнены поставленные цели работы
хорошо	студент показал знание учебного материала, допускает небольшие неточности при выполнении расчетов, смог ответить почти полно на все контрольные вопросы
удовлетворительно	студент в целом освоил материал практической работы, но затрудняется с выполнением всех заданий практической работы без помощи преподавателя, ответил не на все контрольные вопросы
неудовлетворительно	студент имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практическойработы, не может самостоятельно выполнить задания практической работы, не раскрыл содержание контрольных вопросов

8.Форма отчета: Выполните задания на листах

9. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое задание 8

1. **Название темы**Вычисление пределов последовательностей и функций с применением различных методов.

2.Учебные цели: отработать навык вычисления пределов функций

3. Продолжительность занятия: 2 часа.

4.Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материалМетодические указания к практическим занятиям

5. Литература, информационное обеспечение

1 Башмаков М.И. Математика: учеб.для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015.
2 Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб.для студ. учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015
3 Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб.для учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1 Внимательно ознакомьтесь с основными теоретическими сведениями, включающими также примеры решения задач.
2 Выберите задания согласно своему варианту и приступайте к работе.

Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0 .

__Определение.__ **Пределом** функции $y = f(x)$ называется __число__ A к которому неограниченно приближается значение функции, в то время, как значение аргумента неограниченно приближается к т. x_0

В символической записи

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

__**Теорема 1 (единственности)**__ Функция не может иметь более одного предела.

__**Определение.**__ Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно малой** ***(б.м.)*** в т. $x = x_0$, если при $x \to x_0$ функция неограниченно приближается к нулю.т.е.

$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0}$

Пример: Функция $y = 2^x$ является бесконечно малой при $x \to -\infty$. Т.е. $\lim\limits_{x\to -\infty} 2^x = 0$

__**Определение.**__ Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно большой** ***(б.б.)*** в т. $x = x_0$, если при $x \to x_0$ функция неограниченно возрастает или неограниченно убывает т.е.

$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty}$.

Пример: Функция $y = x$ является бесконечно большой при $x \to \infty$. Т.е. $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$

<u>Теорема 2</u> Если функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ является ***б.м.***, то функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ является ***б.б.*** при $x \to x_0$,

т.е. если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$

<u>Теорема 3</u> Если функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ является ***б.б.***, то функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ является ***б.м***. при $x \to x_0$,

т.е. если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

<u>Теорема 1</u> Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) их пределов, если эти пределы существуют.

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$$

<u>Теорема 2</u> Предел произведения функций равен произведению их пределов, если эти пределы существуют.

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

<u>Следствие 1.</u> Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

$$\lim_{x\to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

<u>Теорема 3</u>

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-3}{x^2+x-4}$.

<u>Решение:</u>

При подстановке предельного значения аргумента $x = 1$ в предельную функцию $\dfrac{x-3}{x^2+x-4}$, Получаем число 1, это и есть значение искомого предела:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-3}{x^2+x-4} = \frac{1-3}{1+1-4} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-3}{x-4}$.

<u>Решение:</u>

При подстановке предельного значения аргумента $x = 4$ в числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x-3}{x-4}$, получаем в числителе число 1, а в знаменателе число 0, значит, в знаменателе находится функция, стремящаяся к нулю, при $x \to 4$, т.е. бесконечно малая функция. По теореме 2 получаем, что данный предел равен бесконечности:

$$\lim_{x\to4}\frac{x-3}{x-4}=\frac{4-3}{4-4}=\left\langle\frac{1}{0}\right\rangle=\infty$$

Пример 4. Найти предел $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+x-6}$.

Решение*:*

После подстановки предельного значения $x=2$ в предельную функцию $y=\frac{x^2-4}{x^2+x-6}$ получаем неопределенность $\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle$. Чтобы избавиться от этой неопределенности, раскладываем числитель и знаменатель дроби на множители, пользуясь либо формулами сокращенного умножения, либо формулой разложения квадратного трехчлена на множители.После этого сокращаем одинаковый множитель числителя и знаменателя, тем самым, избавляясь от неопределенности. Далее опять подставляем $x=2$ в предельную функцию $y=\frac{x+2}{x+3}$ и получаем число. Предел вычислен.

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+x-6}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x+3}=\frac{2+2}{2+3}=0{,}8$$

Пример 2. Вычислить предел функций $\lim_{x\to2}(2x+3)$

Решение. Используя теоремы о пределах и формулы (2)-(5) получим $\lim_{x\to2}(2x+3)=\lim_{x\to2}(2x)+\lim_{x\to2}3=2\lim_{x\to2}x+\lim_{x\to2}3=2\cdot2+3=7$

Пример 3. Вычислить предел функций $\lim_{x\to1}\frac{x^2+2^x}{\sqrt{x+3}}$

Решение. Для того, чтобы вычислить предел функции в точке подставим значение аргумента функции в этой точке, т.е. вместо х подставим единицу: $\lim_{x\to1}\frac{x^2+2^x}{\sqrt{x+3}}=\frac{1^2+2^1}{\sqrt{1+3}}=\frac{3}{2}$

Пример 4. Вычислить предел функций $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

Решение.Имеем неопределённость вида$\left[\frac{0}{0}\right]$. Используя правило раскрытия неопределённостей (а) воспользуемся формулами сокращённого умножения: $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x-2}=\left[\frac{4}{0}\right]=\infty$.

Пример 5. Вычислить предел функций $\lim_{x\to6}\frac{6-x}{3-\sqrt{x+3}}$

Решение Неопределённость вида$\left[\frac{0}{0}\right]$. Домножим и числитель, и знаменатель на сопряжённый множитель:

$$\lim_{x\to6}\frac{6-x}{3-\sqrt{x+3}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to6}\frac{(6-x)\cdot(3+\sqrt{x+3})}{(3-\sqrt{x+3})\cdot(3+\sqrt{x+3})}=\lim_{x\to6}\frac{(6-x)(3+\sqrt{x+3})}{9-(x+3)}=\lim_{x\to6}(3+\sqrt{x+3})=6$$

7..Заданиядля самостоятельной работы

Вычислить пределы

№	***a***	***b***	***c***

1вариант	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-x-6}$, где $x_0=-1,\ x_0=-2$	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+10x+25}{x^2+3x-10}$, где $x_0=3,\ x_0=-5$	$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-64}{\sqrt{x+1}-3}$
2 вариант	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+x-1}{5x^2+4x-1}$, где $x_0=3,\ x_0=-1$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+x-4}{3x^2+5x+8}$	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{4x+9}-1}{5x+10}$
3вариант	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}$, где $x_0=-1,\ x_0=3$	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-5x-3}{-15-4x+3x^2}$, где $x_0=1,\ x_0=3$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{3x}-x}$
4вариант	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$, где $x_0=1,\ x_0=-1$	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$, где $x_0=3,\ x_0=1$	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{3x+18}-3}{x^2-9}$

8.Критерии оценки

Оценка	Критерии оценки
отлично	студент имеет глубокие знания учебного материала по теме практической работы, показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, самостоятельно выполнил все рекомендации по выполнению практической работе, смог ответить на контрольные вопросы, даёт правильный алгоритм решения задачи, выполнены поставленные цели работы
хорошо	студент показал знание учебного материала, допускает небольшие неточности при выполнении расчетов, смог ответить почти полно на все контрольные вопросы
удовлетворительно	студент в целом освоил материал практической работы, но затрудняется с выполнением всех заданий практической работы без помощи преподавателя, ответил не на все контрольные вопросы
неудовлетворительно	студент имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практическойработы, не может самостоятельно выполнить задания практической работы, не раскрыл содержание контрольных вопросов

8.Форма отчета: Выполните задания на листах

9. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое задание 9

1.Название темыИсследование функции на непрерывность, определение точек разрыва.

2.Учебные цели: отработать навыки исследования функций и построения графиков

3. Продолжительность занятия: 2 часа.

Методические указания к практическим занятиям

5. Литература, информационное обеспечение

1 Башмаков М.И. Математика: учеб.для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015.

2 Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб.для студ. учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

3 Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб.для учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

6.Методические рекомендации по выполнению работы: изучите краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия и приступайте к выполнению заданий

Общая схема исследования функции и построения её графика.

1. Найти область определения функции;
2. Проверить функцию на четность и нечетность (заметим, что графики четных функций симметричны относительно оси (ОУ), а нечетных – относительно начала координат); проверяют функцию на периодичность;
3. Найти точки пересечения графика с координатными осями (ось ОХ имеет уравнение $y=0$, ось ОУ имеет уравнение $x=0$);
4. Исследовать функцию на монотонность и найти точки экстремума;
5. Найти интервалы выпуклости графика функции и точки его перегиба;
6. Найти асимптоты графика функции;
7. Построить график.

***<u>Комментарии к схеме</u>*:**

1) Совокупность всех тех значений, которые принимает независимая переменная x функции y=f(x)

2) а)D(y) симметрична относительно 0

б)f(–x)= f(x) – функция четная (график симметричен относительно оси Оу)

f(–x)= – f(x) – функция нечетная (график симметричен относительно начала координат)

3) - с осью ОХ (y = 0)

- с осью ОУ (x = 0)

4) Найти производную f ′(x) данной функции f(x).

Найти критические точки (внутренние точки области определения, в которых производная функции

$f'(x)$ равна нулю или не существует).Критические точки разбивают область определения функции $f(x)$ на интервалы, в каждом из которых производная $f'(x)$ сохраняет свой знак. Эти интервалы будут интервалами монотонности.

Определить знак производной на каждом из интервалов монотонности.

Если $f'(x) \geq 0$, то $f(x)$ возрастает на этом промежутке.

Если $f'(x) \leq 0$, то $f(x)$ убывает на этом промежутке.

Исследовать знак производной $f'(x)$ в окрестности точки $x0$.

Если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку $x0$ с «-» на «+», то в этой точке функция $f(x)$ имеет минимум.

Если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку $x0$ с «+» на «-», то в этой точке функция $f(x)$ имеет максимум.

Если $f'(x)$ не меняет знак при переходе через точку $x0$, то в этой точке функция $f(x)$ не имеет экстремумов.

5) Найти вторую производную $f''(x)$ данной функции $f(x)$.

Найти критические точки второго рода (внутренние точки области определения, в которых вторая производная функции $f''(x)$ равна нулю или не существует).

Критические точки второго рода разбивают область определения функции $f(x)$ на интервалы, в каждом из которых производная $f''(x)$ сохраняет свой знак. Эти интервалы будут интервалами выпуклости.

Определить знак второй производной на каждом из интервалов выпуклости.

Если $f''(x) > 0$, то график функции $f(x)$ выпуклый вниз.

Если $f''(x) < 0$, то график функции $f(x)$ выпуклый вверх.

Если $f''(x)$ меняет знак при переходе через критическую точку второго рода, то эта точка будет точкой перегиба графика функции.

6) Асимптота – это прямая, к которой приближаются точки графика функции при бесконечном удалении их от начала координат.

Вертикальная асимптота $\boxed{x = a}$

если: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$

Горизонтальная асимптота $\boxed{y = b}$

если: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

Наклонная асимптота $\boxed{y = kx + b}$

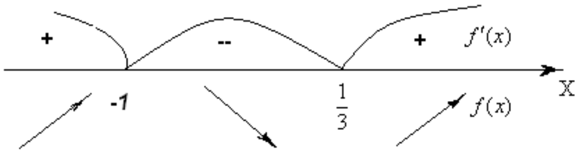
если: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - kx \right) = b \end{cases}$ или $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx \right) = b \end{cases}$

7) Отметить данные полученные в ходе исследования, добавить при необходимости некоторое количество точек.

Пример: Исследовать функцию $y = x^3 + x^2 - x - 1$ и построить ее график.

Решение: исследуем функцию по схеме:

1. D(y)=R;
2. $y(-x)=(-x)^3+(-x)^2-(-x)-1=-x^3+x^2+x-1=-(x^3-x^2-x+1)$ - функция не будет ни четной, ни нечетной; функция непериодическая;
3. Найдем точки пересечения с (ОХ): $x^3+x^2-x-1=0$. Перебирая делители свободного члена, находим целые нули функции: $x=-1$ *и* $x=1$.
   Найдем точки пересечения графика функции с осью (ОУ): если $x=0$, то $y=-1$;
4. Для нахождения интервалов монотонности функции найдем ее производную: $y'=3x^2+2x-1$. Найдем критические точки функции: $y'=3x^2+2x-1=0$. Получим: $x_1=-1$ *и* $x_2=\frac{1}{3}$. Найдем интервалы возрастания и убывания функции:

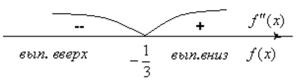


Из чертежа имеем, что функция возрастает на $(-\infty;-1)$ *и* $(\frac{1}{3};+\infty)$, убывает на $(-1;\frac{1}{3})$. Найдем экстремумы функции:

$\max f(x)=f(-1)=0$. Значит, точка максимума имеет координаты $(-1;\,0)$

$\min f(x)=f(\frac{1}{3})=-1\frac{5}{27}$. Значит, точка минимума имеет координаты $(\frac{1}{3};-1\frac{5}{27})$

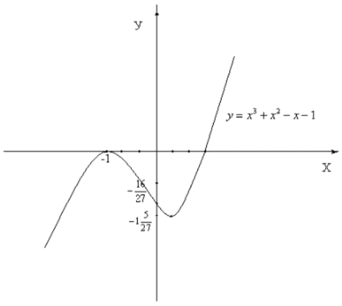
5. Для нахождения интервалов выпуклости графика функции вычислим вторую
   производную: $y''=6x+2$. Найдем критические точки 2 рода функции:
   $6x+2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$. Определим знак второй производной в интервалах, на которые разбивается область определения



Значит, график функции будет выпуклым вверх на $(-\infty;-\frac{1}{3})$ и выпуклым вниз на $(-\frac{1}{3};+\infty)$. Т.к. вторая производная меняет знак при переходе через точку $x=-\frac{1}{3}$, то в ней график будет иметь перегиб. Вычислим: $f(-\frac{1}{3})=-\frac{16}{27}$. Значит, точка перегиба $(-\frac{1}{3};-\frac{16}{27})$.

Асимптот нет;

6. Построим график:



<u>Задания для практической работы</u>

Исследовать функцию с помощью производной и построить график.

1. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ 2. $y = 2 - 3x + x^3$ 3. $y = 2 - 3x + x^3$

Контрольные вопросы:

1. Расскажите общую схему исследования функции.
2. Что такое асимптота?
3. Как найти интервалы выпуклости графика функции и точки его перегиба?
4. Как найти интервалы монотонности функции и точки экстремума?

7.Критерии оценки

Оценка	Критерии оценки
отлично	студент имеет глубокие знания учебного материала по теме практической работы, показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, самостоятельно выполнил все рекомендации по выполнению практической работе, смог ответить на контрольные вопросы, даёт правильный алгоритм решения задачи, выполнены поставленные цели работы
хорошо	студент показал знание учебного материала, допускает небольшие неточности при выполнении расчетов, смог ответить почти полно на все контрольные вопросы
удовлетворительно	студент в целом освоил материал практической работы, но затрудняется с выполнением всех заданий практической работы без помощи преподавателя, ответил не на все контрольные вопросы
неудовлетворительно	студент имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практическойработы, не может самостоятельно выполнить задания практической работы, не раскрыл содержание контрольных вопросов

8.Форма отчета: Выполните задания на листах

9. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое задание 10

1.Название темыСоставление уравнения касательной и нормали. Определение экстремумов функции.

2.Учебные цели: отработка навыков применения физического и геометрического смысла производной

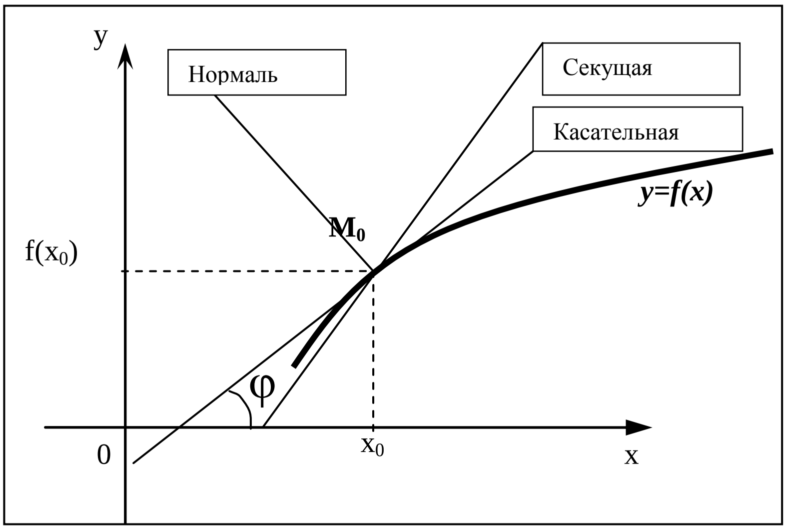
3. Продолжительность занятия: 2 часа.

Методические указания к практическим занятиям

5. Литература, информационное обеспечение

1 Башмаков М.И. Математика: учеб.для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015.
2 Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб.для студ. учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015
3 Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб.для учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

6.Методические рекомендации по выполнению работы: изучите краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия и приступайте к выполнению заданий



Геометрический смысл производной

$$\boxed{f'(x_0) = k = tg\varphi}$$

*Производная функция f(x)в точке M_0*равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции *f(x) в этой точке.*.

Касательной к данной кривой в данной точке M_0 называется предельное положение секущей M_0X, когда т.X, перемещаясь по кривой, неограниченно приближается к M_0.

Уравнение касательной к кривой:

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Прямая , проходящая через т.М перпендикулярно касательной, называется *нормалью* к этой кривой в т.М.

Уравнение нормали к кривой: $\boxed{y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$.

Физический смысл производной

Производная функции показывает скорость изменения функции.

Физический смысл производной функции s(t), где t - время, а s(t) - закон движения (изменения координат) –скорость движения. $v(t) = s'(t)$
Вторая производная функции –. ускорение. $a(t) = v'(t)$

Производная в физике

формулы из физики, где используется производная.

- ✓ υ(t) = x'(t) – скорость.
- ✓ a(t) = υ'(t) – ускорение.
- ✓ I(t) = q'(t) – сила тока.
- ✓ c(t) = Q'(t) – теплоемкость.
- ✓ d(l) = m'(l) – линейная плотность.
- ✓ K(t) = l'(t) – коэффициент линейного расширения.
- ✓ ω(t) = φ'(t) – угловая скорость.
- ✓ e(t) = ω'(t) – угловое ускорение.

Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят понятие мощности.

- ✓ N(t) = A'(t) – мощность.
- ✓ F(x)= A'(x) – Сила есть производная работы по перемещению.
- ✓ E = Ф'(t) – ЭДС индукции F = p'(t) – 2 закон Ньютона.

Примеры применения производной в физике	
Задача	Решение
Тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону x(t)=t^2+t+1. 1. Какова кинетическая энергия тела в конце 3сек. после начала движения тела? Какова сила, действующая на тело?	1. $W_к = (m\cdot v^2)/2$ x ' (t) = v (t) = 2t+1, v (3) = 7, $W_к = (4\cdot 7^2)/2 = 98$ 2. F = ma, a(t) = v' (t) = x' ' (t), x ' (t) = v (t) = 2t+1, a(t)= v' (t) = 2, F = ma = 4·2 = 8 Н.
Угол поворота тела вокруг оси изменяется по закону $\varphi(t)=0,1t^2-0,5t+0,2$.Найти угловую скорость вращения тела в момент времени t=20c.	ω(t) = φ'(t); ω(t) = φ'(t) = 0,2t-0,5 ω(20) = 3,5
Для любой точки C стержня AB длиной 10 см, масса куска стержня AC определяется по формуле m(l)=$3l^2$+5l.Найти линейную плотность стержня в середине отрезка AB, в конце отрезка.	d(l) = m'(l); d(l) =m'(l) = 6l+5 d(5) = 6·5+5=35 – в середине отрезка d(10) = 6·10+5=65 – в конце отрезка

Примеры применения геометрического смысла производной.

Пример 1

Составить уравнение касательной к графику функции

$y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 2x + 3$ в точка А (3, 6)

Решение. Для нахождения углового коэффициента касательной найдем производную данной функции: $y' = \frac{2}{3}3x^2 - 2x - 2 = 2x^2 - 2x - 2$

Угловой коэффициент касательной равен значению производной функции при $x = 3$

$k = y'(3) = 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 2 = 18 - 6 - 2 = 10$

Уравнение касательной имеет вид

$y - 6 = 10(x - 3)$, или $y - 6 = 10x - 30$, т.е. $10x - y - 24 = 0$

Пример 2

Составить уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = \frac{3x-4}{2x-3}$ в точке с абсциссой $x = 2$.

Решение. Сначала найдем ординату точки касания $A(2, y)$. Так как точка А лежит на кривой, то ее координат удовлетворяют уравнению кривой, т.е.

$y = \frac{3 \cdot 2 - 4}{2 \cdot 2 - 3} = \frac{6-4}{4-3} = \frac{2}{1} = 2 \qquad A(2;2)$

Уравнение касательной, проведенной к кривой в точке $A(2;2)$, имеет вид $y - 2 = k(x - 2)$. Для нахождения углового коэффициента касательной найдем производную:

$$y' = \frac{(2x-3)(3x-4)' - (2x-3)'(3x-4)}{(2x-3)^2} = \frac{(2x-3)\cdot 3 - 2(3x-4)}{(2x-3)^2}$$

$$= \frac{6x - 9 - 6x + 8}{(2x-3)^2} = -\frac{1}{(2x-3)^2}$$

Угловой коэффициент касательной равен значению производной функции при $x = 2$:

$k = y'(2) = -\frac{1}{(2^2-3)^2} = -\frac{1}{1} = -1$

Уравнение касательной таково:

$y - 2 = -(x - 2)$, $y - 2 = -x + 2$, т.е. $x + y - 4 = 0$.

Задания для самостоятельной работы

Решить задачи, используя производную.

1.Тело массой 2 кг движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2+t+1$. Найти действующую на тело силу F, кинетическую энергию тела через $2c$ после начала движения.

2.Маховик, задерживаемый тормозом, за время t поворачивается на угол $\varphi(t)=4t-0{,}3t^2$. Найти угловую скорость $\omega(t)$ вращения маховика в момент времени $2\ c$.

3.Найти скорость тела, движущегося по закону $s(t)=3t+5$

4.Тело движется прямолинейно по закону $s(t)=1-2t+t^3$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=3c$.
5.Найдите уравнение касательной к графику функции y=lnx в точке с абсциссой 1.
6.Найдите уравнение касательной к графику функции $\cos\frac{x}{2}$в точке с абсциссой $\frac{\pi}{2}$.
7. Найдите уравнение нормали к графику функции $y = e^x$ в точке с абсциссой, равной нулю.

Контрольные вопросы:
1. Дайте определение производной функции.
2. В чем состоит геометрический смысл производной функции?
3. В чем состоит физический смысл первой производной функции?
4. Дайте определение второй производной функции.
5. В чем состоит физический смысл второй производной функции?
6. Запишите формулы нахождения производных степенной и показательной функций.
7. Запишите уравнение касательной к кривой в данной точке.
8. Дайте определение нормали к кривой.
9. Запишите уравнение нормали к кривой в данной точке.
10. Запишите формулы производных тригонометрических функций.

7.Критерии оценки

Оценка	Критерии оценки
отлично	студент имеет глубокие знания учебного материала по теме практической работы, показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, самостоятельно выполнил все рекомендации по выполнению практической работе, смог ответить на контрольные вопросы, даёт правильный алгоритм решения задачи, выполнены поставленные цели работы
хорошо	студент показал знание учебного материала, допускает небольшие неточности при выполнении расчетов, смог ответить почти полно на все контрольные вопросы
удовлетворительно	студент в целом освоил материал практической работы, но затрудняется с выполнением всех заданий практической работы без помощи преподавателя, ответил не на все контрольные вопросы
неудовлетворительно	студент имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практическойработы, не может самостоятельно выполнить задания практической работы, не раскрыл содержание контрольных вопросов

8.Форма отчета: Выполните задания на листах

9. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 11

1.Название темы Вычисление наибольшего и наименьшего значений функции на заданном отрезке.

2.Учебные цели: отработка навыков применения производной для вычисления наибольшего и наименьшего значения функции

3. Продолжительность занятия: 2 часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика».

5. Литература, информационное обеспечение

1 Башмаков М.И. Математика: учеб.для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015.
2 Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб.для студ. учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015
3 Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб.для учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

.6 Методические указания по выполнению работы:

1. Ознакомиться с теоретическим материалом по практической работе.
2. Рассмотрите образцы решения задач по теме.
3. Выполнить предложенное задание.

Пример выполнения задания

Из квадратного листа жести со стороной a надо изготовить открытую сверху коробку, вырезав по углам квадратики и загнув образовавшиеся кромки. Какой должна быть сторона основания коробки, чтобы ее объем был максимальным?

Решение:

Обозначим через x длину стороны основания коробки. Тогда длины сторон вырезанных квадратиков равны $\frac{1}{2}(a-x)$, а объем коробки равен $\frac{1}{2}(a-x)\times x^2$. По смыслу задачи число ч удовлетворяет неравенству $0<x<a$, т.е. принадлежит интервалу (0;a). Таким образом, задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $V(x)=\frac{1}{2}(a-x)\times x^2$ на интервале (0; a).

$$V\text{'}(x)=ax-\frac{3}{2}x^2=0$$

$$a\left(x-\frac{3}{2}x\right)=0$$

x=0 или $x=\frac{3}{2}a$

Так как $V(0)=\frac{1}{2}(a-a)\times 0^2=0$ и $V(a)=0$, то ни одно из этих значений не может быть наибольшим.

Так как $V\left(\frac{2}{3}a\right)=\frac{1}{2}\left(a-\frac{2}{3}a\right)\times(\frac{2}{3}a)^2=\frac{2}{27}a^3$, то, следовательно, максимальный объем имеет та коробка, сторона основания которой равна $\frac{2}{3}$.

Задание для самостоятельной работы

1.Кусок проволоки длиной 48 см сгибают так, чтобы образовался прямоугольник. Какую длину должны иметь стороны прямоугольника, что его площадь была наибольшей?
2.Площадь прямоугольника 64 кв. см. Какую длину должны иметь его стороны, чтобы периметр был наименьшим?
3.Открытый бак, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, должен вмещать 13,5 литров жидкости. При каких размерах бака на его изготовление потребуется наименьшее количество металла?
4.Из круглого бревна вырезают балку с прямоугольным сечением наибольшей площади. Найдите размеры сечения балки, если радиус сечения бревна равен 20 см.
5.Буровая вышка расположена в поле в 9 км от ближайшей точки шоссе. С буровой направить курьера в пункт, расположенный по шоссе в 15 км от упомянутой точки (считаем шоссе прямолинейным). Скорость курьера на велосипеде по полю 8 км/ч, а по шоссе 10 км/ч. К какой точке шоссе ему надо ехать, чтобы в кратчайшее время достичь пункта?
6.Разность двух чисел равна 8. Каковы должны быть эти числа, чтобы произведение куба первого числа на второе было наименьшим?
7.Для стоянки машин выделили площадку прямоугольной формы, примыкающую одной стороной к стене здания. Площадку обнесли с трех сторон металлической сеткой длиной 200 метров, и площадь ее при этом оказалась наибольшей. Каковы размеры площадки?

Контрольные вопросы

1.Сформулируйте необходимое условие существования экстремума функции.
2.Какие точки называются критическими?
3.Сформулируйте признак возрастания (убывания) функции.
4.Сформулируйте признак максимума (минимума) функции.

7.Критерии оценки

Оценка	Критерии оценки
отлично	студент имеет глубокие знания учебного материала по теме практической работы, показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, самостоятельно выполнил все рекомендации по выполнению практической работе, смог ответить на контрольные вопросы, даёт правильный алгоритм решения задачи, выполнены поставленные цели работы
хорошо	студент показал знание учебного материала, допускает небольшие неточности при выполнении расчетов, смог ответить почти полно на все контрольные вопросы
удовлетворительно	студент в целом освоил материал практической работы, но затрудняется с выполнением всех заданий практической работы без помощи преподавателя, ответил не на все контрольные вопросы
неудовлетворительно	студент имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практическойработы, не может самостоятельно выполнить задания практической работы, не раскрыл содержание контрольных вопросов

8.Форма отчета: Выполните задания на листах

9. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 12

1.Название темыВычисление неопределённых интегралов методом замены переменных и с помощью интегрирования по частям.

2.Учебные цели: Научиться вычислять интегралы методом интегрирования по частям

3. Продолжительность занятия: 2 часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал рабочая тетрадь, ручка, методические рекомендации по выполнению практической работы, справочная литература

5. Литература, информационное обеспечение

1 Башмаков М.И. Математика: учеб.для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015.
2 Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб.для студ. учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015
3 Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб.для учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

6 Методические указания по выполнению работы:

1. Ознакомиться с теоретическим материалом по практической работе.
2. Рассмотрите образцы решения задач по теме.
3.Выполнить предложенное задание согласно варианту по списку группы.
4.Изучить условие заданий для практической работы и выполнить её.
5. Ответить на контрольные вопросы даются письменно, после решения заданий в тетради для практических работ. Во время выполнения работы обучающийся может пользоваться своим конспектом, а также учебной литературой и справочным материалом.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Неопределенный интеграл

Функция *F(x)* называется *первообразной* для функции *f(x)* в промежутке $a \le x \le b$, если в любой точке этого промежутка ее производная равна *f(x):*

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx, \quad a \le x \le b \quad (1)$$

Совокупность всех первообразных функций *F*(x) + c для функции *f*(x) на некотором промежутке называется *неопределённым интегралом* и обозначается

$\int f(x)dx = F(x) + C$, где $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, а С - произвольной постоянной интегрирования. Процесс нахождения первообразной функции называется *интегрированием*.

Основные формулы интегрирования (табличные интегралы)

1. $\int dx = x + C;$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad (n \neq -1)$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

4. $\int e^x dx = e^x + C;$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C;$

13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C;$

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

16. $\int \ln x dx = x \ln x - x + C;$

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx, \ \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

3. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int [f(x) + \varphi(x)]dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx$$

4.Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \ a \neq 0.$$

Метод непосредственного интегрирования

Под непосредственным интегрированием понимают способ интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводятся к одному или нескольким табличным интегралам.

Интегрирование способом подстановки

Сущность интегрирования методом подстановки заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(u)du$, который легко вычисляется по какой-либо из основных формул интегрирования. Для нахождения $\int f(x)dx$ заменяем переменную x новой переменной u с помощью подстановки $x=\varphi(u)$. Дифференцируя это равенство, получаем $dx=\varphi'(u)du$.

Подставляя в подынтегральное выражение вместо х и dxих значения , выраженные через udu, имеем:

$$\int f(x)dx=\int f\left[\varphi(u)\right]\varphi'(u)du=\int F(u)du \qquad (3)$$

После того, как интеграл относительно новой переменной u будет найден, с помощью подстановки $u=\phi(x)$ он приводится к переменной x.

Метод интегрирования по частям

Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на некотором промежутке. Найдем дифференциал произведения этих функций:

$$d(uv)=u'vdx+uv'dx.$$

Так как по условию функции $u'v$ и uv' непрерывны, можно проинтегрировать обе части этого равенства,

$\int d(uv)=\int u'vdx=\int uv'dx$, или $\int d(uv)=\int vdu+\int udv$ но $\int d(uv)=uv+C$,

следовательно $\int udv=uv-\int vdu$ (4)

В правой части формулы (4) постоянную интегрирования C не пишут, т.к она фактически присутствует в интеграле $\int vdu$. Формула (4) называется ***формулой интегрирования по частям.***

Сущность метода интегрирования по частям вполне соответствует его названию. Дело в том, что при вычислении интеграла этим методом подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляется в виде произведения множителей u и dv; при этом dx обязательно входят в dv. В результате получается, что заданный интеграл находят по частям: сначала находят $\int dv$, а затем $\int vdu$. Естественно, что этот метод применим лишь в случае, если задача нахождения указанных двух интегралов более проста, чем нахождение заданного интеграла.

При вычислении интегралов методом интегрирования по частям главным является разумное разбиение подынтегрального выражения на множители u и dv. Общих установок по этому вопросу не имеется. Однако, для некоторых типов интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям, сделать это возможно.

1. В интегралах вида: $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin axdx$, $\int P(x)\cos axdx$,

где $P(x)$ – многочлен относительно x, a – некоторое число, полагают

$u = P(x)$, а все

остальные сомножители за dv.

2. В интегралах вида: $\int P(x)\ln|ax|dx$, $\int P(x)\arcsin axdx$, $\int P(x)\arccos axdx$, $\int P(x)arctgaxdx$, $\int P(x)arcctgaxdx$

полагают $P(x)dx = dv$, а остальные сомножители за u.

3. В интегралах вида: $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$, где *a* и *b*числа, за u можно принять

любую из функций e^{ax} или *sinbx* (или *cosbx*).

Пример по выполнению практической работы

Пример 1. Вычислить*:* 1) $\int(5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)dx$; 2) $\int\frac{(x+2)^3dx}{x}$;

Решение:

1) $\int(5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)dx = 5\int x^4dx - 4\int x^3dx + 3\int x^2dx - \int dx = x^5 - x^4 + x^3 - x + C$;

2) $\int\frac{(x+2)^3dx}{x} = \int\frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x}dx = \int(x^2 + 6x + 12 + \frac{8}{x})dx = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 12x + 8\ln|x| + C$

Пример 2. Вычислить 1) $\int(1+x)^5dx$*;* 2) $\int\frac{2e^xdx}{(1-e^x)^2}$; 3) $\int\frac{x^2+1}{x+2}dx$; 4) $\int x\cdot\sqrt{x-3}dx$;

5) $\int\sin 8x\cos 2x\,dx$;

Решение:

1) Положим *1+x = z*. Продифференцируем это неравенство:*d(1+ x)= dz*или*dx = dz.* Заменим в интеграле**:**

$$\int(1+x)^5dx = \int z^5dz = \frac{z^6}{6} + C = \frac{1}{6}\cdot(1+x)^6 + C.$$

2)Сделав замену: $1 - e^x = z$, получим

$$d(1-e^x) = dz \Rightarrow -e^xdx = dz; \quad \Rightarrow e^xdx = -dz;$$

Тогда:

$$\int\frac{2e^xdx}{(1-e^x)^2} = -2\int\frac{dz}{z^2} = \frac{2}{z} + C = \frac{2}{1-e^x} + C;$$

3) Положим $x + 2 = t; \Rightarrow x = t - 2; \Rightarrow dx = d(t-2) = dt$

$$\int\frac{x^2+1}{x+2}dx = \int\frac{(t-2)^2+1}{t}dt = \int\frac{t^2 - 4t + 5}{t}dt = \int\left(t - 4 + \frac{5}{t}\right)dt = \frac{t^2}{2} - 4t + 5\ln|t| + C =$$

$$= \frac{(x+2)^2}{2} - 4(x+2) + 5\ln|x+2| + C = \frac{x^2}{2} - 2x - 6 + 5\ln|x+2| + C = \frac{x^2}{2} - 2x + 5\ln|x+2| + C_1,$$

где $C_1 = C - 6$;

4) Пусть $\sqrt{x-3} = t$, тогда $x = t^2 + 3, \quad dx = 2tdt$. Поэтому

$$\int x\cdot\sqrt{x-3}dx=\int(t^2+3)\cdot t\cdot 2tdt=2\int(t^4+3t^2)dt=2\cdot\frac{t^5}{5}+6\cdot\frac{t^3}{3}+C=$$
$$=\frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5}+2\sqrt{(x-3)^3}+C;$$

5) Этот интеграл решается с помощью формул тригонометрии:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)).$$

Поэтому, имеем

$$\int\sin 8x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 10x+\sin 6x)dx=-\frac{1}{20}\cos 10x-\frac{1}{12}\cos 6x+C;$$

Пример 3. Вычислить 1) $\int x\sin xdx$; 2) $\int x\ln xdx$;

Решение:

1) положим $u=x$, $dv=\sin xdx$; тогда $du=dx$, $\int dv=\int\sin xdx$, т.е. $v=-\cos x$. Используя формулу (4), получим

$$\int x\sin xdx=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C.$$

2) $\int x\ln xdx$; положим $u=\ln x$, $dv=xdx$; тогда $du=\frac{dx}{x}$;

$$v=\int dv=\int xdx=\frac{x^2}{2}.$$

Задания для практического занятия:

Задание. Методом интегрирования по частям вычислить:

а) $\int(1-x)\sin xdx$ б) $\int\frac{\ln x}{x^3}dx$ в) г) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$

Вычислить интегралы известными способами

Вариант 1	Вариант 2
1. $\int\frac{5x^4+2-3x}{x^2}dx$	1. $\int(3x^2+5\sqrt[3]{x^2}+3\sin x)dx$
2. $\int(2x^3+3\sqrt{x}-9^x)dx$	2. $\int\frac{1+2x+3x^3}{x}dx$
3. $\int\frac{(\ln x+3)^2}{x}dx$	3. $\int e^{\sin x}\cos xdx$
4. $\int\operatorname{arc\,tg}2xdx$	4. $\int\ln(x+4)dx$
5. $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{\sin x}}$	5. $\int\frac{\sqrt{\operatorname{arc\,tg}x}dx}{1+x^2}$
6. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{3\cos^2\frac{x}{3}}$	6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin^2x\cos xdx$

7. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+5}dx$

7. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\frac{x}{2}dx$

8. $\int_0^8 (8\sqrt[3]{x}-3\sqrt{2x})dx$

8. $\int_0^9 \left(4\sqrt[3]{3x}-3\sqrt{x}\right)dx$

9. $\int_{-1}^0 \arccos x dx$

9. $\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin x dx$

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется первообразной для функции $f(x),\quad x \in (a;b)$?
2. Что называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ на некотором промежутке?
3. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
4. Перечислите основные табличные интегралы.
5. Какие методы интегрирования вы знаете?

7.Критерии оценки

Оценка	Критерии оценки
отлично	студент имеет глубокие знания учебного материала по теме практической работы, показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, самостоятельно выполнил все рекомендации по выполнению практической работе, смог ответить на контрольные вопросы, даёт правильный алгоритм решения задачи, выполнены поставленные цели работы
хорошо	студент показал знание учебного материала, допускает небольшие неточности при выполнении расчетов, смог ответить почти полно на все контрольные вопросы
удовлетворительно	студент в целом освоил материал практической работы, но затрудняется с выполнением всех заданий практической работы без помощи преподавателя, ответил не на все контрольные вопросы
неудовлетворительно	студент имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практическойработы, не может самостоятельно выполнить задания практической работы, не раскрыл содержание контрольных вопросов

8.Форма отчета: Выполните задания на листах

9. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 13

1.Название темы: Построение криволинейной трапеции

2.Учебные цели: научиться вычислять площади криволинейных трапеций с помощью определенного интеграла

3. Продолжительность занятия: 2 часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал: рабочая тетрадь, ручка, методические рекомендации по выполнению практической работы, справочная литература**.**

5. Литература, информационное обеспечение

1 Башмаков М.И. Математика: учеб.для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015.

2 Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб.для студ. учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

3 Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб.для учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1. Ознакомиться с теоретическим материалом по практической работе.
2. Рассмотрите образцы решения задач по теме.
3. Выполнить предложенное задание согласно варианту по списку группы.
4. Изучить условие заданий для практической работы и выполнить её.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Определённый интеграл

Приращение *F (b) – F (a)* любой из первообразных функций *F (x) + C* функции *f (x)* при изменении аргумента от *x = a* до *x = b* называется ***определённым интеграломот a до b функцииf (x):***

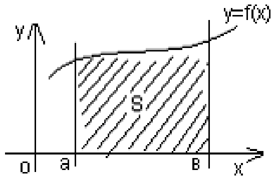
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (1)$$

Числа *a* и *b*называются ***пределами интегрирования, a – нижним, b – верхним.*** Отрезок [*a;b*] называется ***отрезком интегрирования.*** Функция *f (x)* называется ***подынтегральной функцией,*** а переменная *x* – ***переменной интегрирования.*** Формула (1) называется ***формулой Ньютона - Лейбница.***

Геометрический смысл определенного интеграла

Если интегрируемая на отрезке [a;b] функция f (x) неотрицательна, то определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f (x), осью абсцисс и прямыми x = a и x = b :

$S=\int_a^b f(x)dx$



Основные свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

2. $\int_a^b mf(x)dx=m\int_a^b f(x)dx$

3. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

4. $\int_a^a f(x)dx=0$

5. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

Вычисление определенного интеграла
Пример.

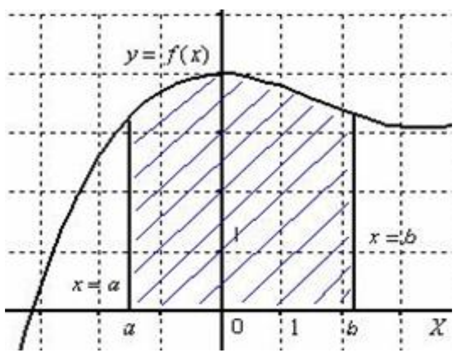
Вычислить определенный интеграл: $\int_2^3 \left(6x^2-4x+1\right)dx$

Решение:
Вычисляем определенный интеграл по всем правилам вычисления неопределенных интегралов, а после применяем формулу Ньютона-Лейбница.

$$\int_2^3 \left(6x^2-4x+1\right)dx=\left(6\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_2^3=\left(2x^3-2x^2+x\right)\Big|_2^3=$$
$$=\left(2\cdot3^3-2\cdot3^2+3\right)-\left(2\cdot2^3-2\cdot2^2+2\right)=\left(54-18+3\right)-\left(16-8+2\right)=39-10=29$$

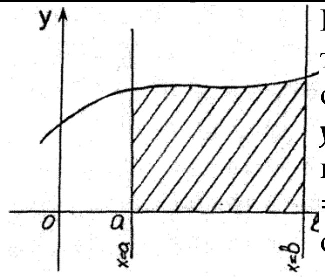
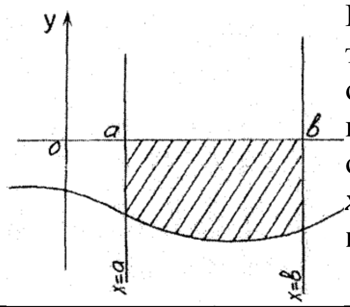
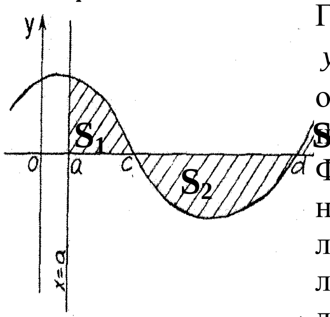
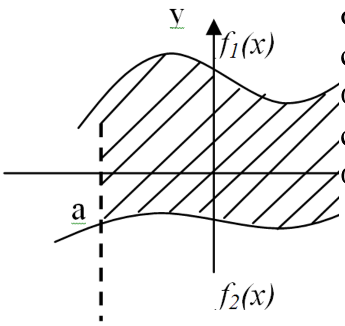
Применение определенного интеграла к вычислению площади плоских фигур.

Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная графиком некоторой функции $y=f(x)$, осью OX и прямыми , $x=b$:



Определенный интеграл используется при вычислении **площадейкриволинейных трапеций**.

Чертеж	Описание	Формулапл

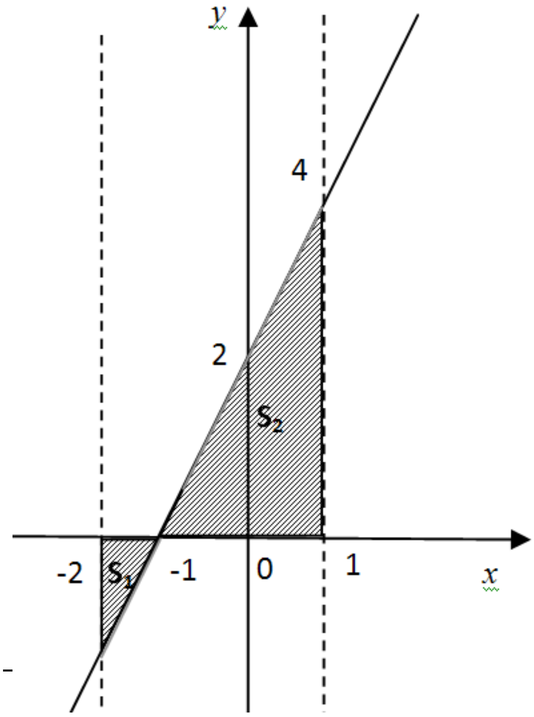
		ощади	
	Криволинейная трапеция, ограниченная кривой ***y* = *f(x)***, осью ***OX***и прямыми ***x* = *a*, *x* = *b*** лежит **над** осью ***OX.***		$S=\int_a^b f(x)dx$
	Криволинейная трапеция, ограниченная кривой***y* = *f(x)***, осью***OX***и прямыми ***x* = *a*, *x* = *b*** лежит **под** осью ***OX***		$S=-\int_a^b f(x)dx$
	График функции $y=f(x)$ пересекает ось *OX* в нескольких точках. Фигура разбивается на части, которые лежат полностью либо над осью *OX* либо полностью под осью *OX*. Вычисляютсяплощадиэтихфигур и суммируются.		$S=S_1+S_2+S_3$
	Фигура ограничена сверху графиком функции $f_1(x)$, а снизу графиком функции $f_2(x)$		$S=\int_a^b \left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx$

Пример

С помощью определенного интеграла найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x+2, \quad y=0, \quad x=-2, \quad x=1$

<u>Решение</u>*:*

Найдем абсциссу точки, в которой функция пересекает ось OX.



Для этого приравняем функцию к нулю:
$2x+2=0, \quad 2(x+1)=0, \quad x+1=0, \quad x=-1$

Искомая фигура выделена на графике штриховкой. Часть фигуры лежит под осью OX (пусть площадь этой часть S_1), часть над осью OX (пусть площадь этой часть S_2). Тогда площадь всей искомой фигуры будет сумма этих площадей: $S=S_1+S_2$

Найдем S_1:

$$S_1=-\int_{-2}^{-1}(2x+2)dx=-\left(\left(x^2+2x\right)\Big|_{-2}^{-1}\right)=-((1-2)-(4-$$

кв. ед.

Найдем S_2:

$$S_2=\int_{-1}^{1}(2x+2)dx=\left(x^2+2x\right)\Big|_{-1}^{1}=(1+2)-(1-2)=3+1=4 \text{ кв.ед.}$$

Тогда, площадь искомой фигуры: $S=S_1+S_2=1+4=5$ кв.ед.

<u>Ответ:</u> 5 кв. ед.

Задания С помощью определенного интеграла найти площадь фигуры, ограниченной линиями

1 вариант	2 вариант
1). $y=x, \quad y=0, \quad x=1, \quad x=3$	1) $y=x+1, \quad y=0, \quad x=-1, \quad x=2$
2) $y=-2x, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=2$	2) $y=9-x^2, \quad y=0, \quad x=-3, \quad x=3$
3) $y=4-x^2, \quad y=0, \quad x=-1, \quad x=1$	3) $y=x^2-1, \quad y=0, \quad x=-1, \quad x=0$
4) $y=x^2-4, \quad y=0, \quad x=-1, \quad x=2$	4) $y=16-x^2, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=4$

Контрольные вопросы

1. Что называется определенным интегралом, и в чем его геометрический смысл?
2. Назовите формулу Ньютона-Лейбница.

3Перечислите свойства определенного интеграла.

4В чем заключается метод непосредственного интегрирования?

5В чем заключается метод замены переменной интегрирования?

7.Критерии оценки

Оценка	Критерии оценки
отлично	студент имеет глубокие знания учебного материала по теме практической работы, показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, самостоятельно выполнил все рекомендации по выполнению практической работе, смог ответить на контрольные вопросы, даёт правильный алгоритм решения задачи, выполнены поставленные цели работы
хорошо	студент показал знание учебного материала, допускает небольшие неточности при выполнении расчетов, смог ответить почти полно на все контрольные вопросы
удовлетворительно	студент в целом освоил материал практической работы, но затрудняется с выполнением всех заданий практической работы без помощи преподавателя, ответил не на все контрольные вопросы
неудовлетворительно	студент имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практическойработы, не может самостоятельно выполнить задания практической работы, не раскрыл содержание контрольных вопросов

8.Форма отчета: Выполните задания на листах

9. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 14

1.Название темы :Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и вычислению объёмов.

2.Учебные цели: научиться вычислять площади плоских фигур и объемы тел вращение с помощью определенного интеграла

3. Продолжительность занятия: 2 часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материал: рабочая тетрадь, ручка, методические рекомендации по выполнению практической работы, справочная литература**.**

5. Литература, информационное обеспечение

1 Башмаков М.И. Математика: учеб.для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015.

2 Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб.для студ. учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

3 Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб.для учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

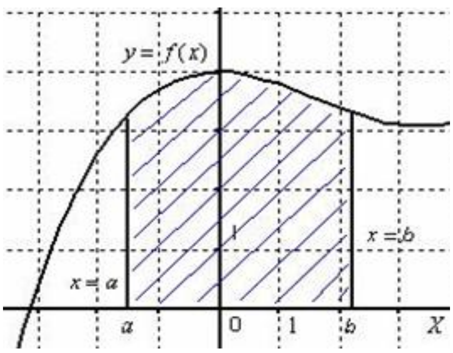
6.Методические рекомендации по выполнению работы:

1. Ознакомиться с теоретическим материалом по практической работе.
2. Рассмотрите образцы решения задач по теме.
3. Выполнить предложенное задание согласно варианту по списку группы.
4. Изучить условие заданий для практической работы и выполнить её.
5. Ответы на контрольные вопросы даются письменно, после решения заданий в тетради для практических работ. Во время выполнения работы обучающийся может пользоваться своим конспектом, а также учебной литературой и справочным материалом.
6. Оформить отчет о работе. Сделайте вывод.

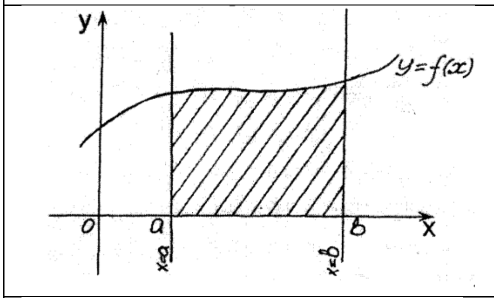
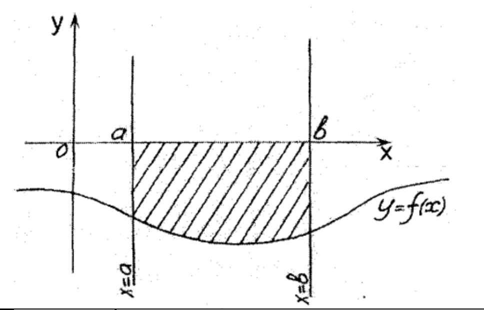
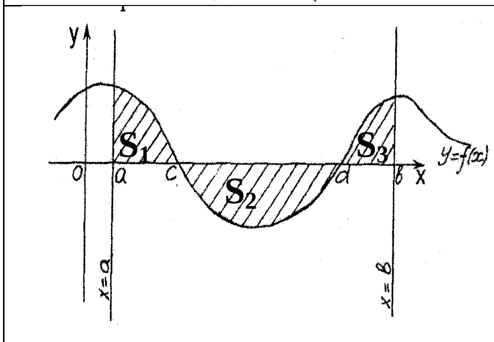
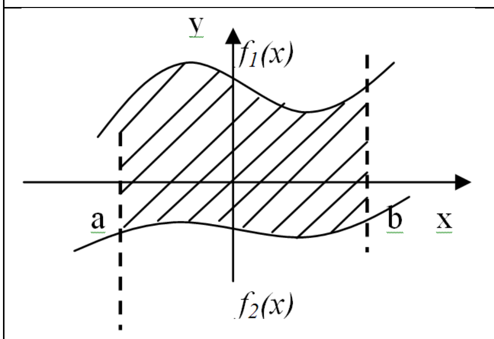
Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Применение определенного интеграла к вычислению площади плоских фигур.

Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная графиком некоторой функции $y = f(x)$, осью OX и прямыми , $x = b$:



Определенный интеграл используется при вычислении **площадейкриволинейных трапеций**.

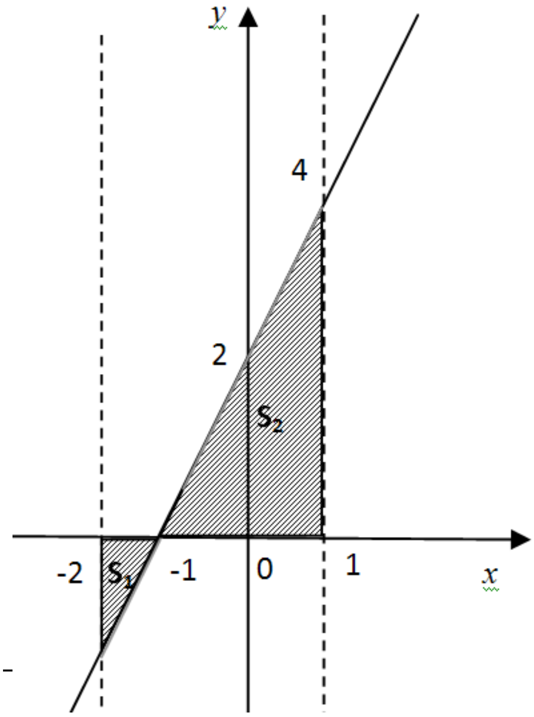
Чертеж	Описание	Формулаплощади
	Криволинейная трапеция, ограниченная кривой ***y* = *f*(*x*)**, осью ***OX*** и прямыми ***x* = *a*, *x* = *b*** лежит **над** осью ***OX***.	$S=\int_a^b f(x)dx$
	Криволинейная трапеция, ограниченная кривой ***y* = *f*(*x*)**, осью ***OX*** и прямыми ***x* = *a*, *x* = *b*** лежит **под** осью ***OX***	$S=-\int_a^b f(x)dx$
	График функции $y=f(x)$ пересекает ось *OX* в нескольких точках. Фигура разбивается на части, которые лежат полностью либо над осью *OX* либо полностью под осью *OX*. Вычисляютсяплощадиэтихфигур и суммируются.	$S=S_1+S_2+S_3$
	Фигура ограничена сверху графиком функции $f_1(x)$, а снизу графиком функции $f_2(x)$	$S=\int_a^b \left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx$

Пример

С помощью определенного интеграла найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x+2,\quad y=0,\quad x=-2,\quad x=1$

<u>Решение:</u>

Найдем абсциссу точки, в которой функция пересекает ось OX .



Для этого приравняем функцию к нулю:
$2x+2=0, \quad 2(x+1)=0, \quad x+1=0, \quad x=-1$

Искомая фигура выделена на графике штриховкой. Часть фигуры лежит под осью OX (пусть площадь этой часть S_1), часть над осью OX (пусть площадь этой часть S_2). Тогда площадь всей искомой фигуры будет сумма этих площадей: $S = S_1 + S_2$

Найдем S_1:

$$S_1 = -\int_{-2}^{-1}(2x+2)dx = -\left(\left(x^2+2x\right)\Big|_{-2}^{-1}\right) = -((1-2)-(4-$$

кв. ед.

Найдем S_2:

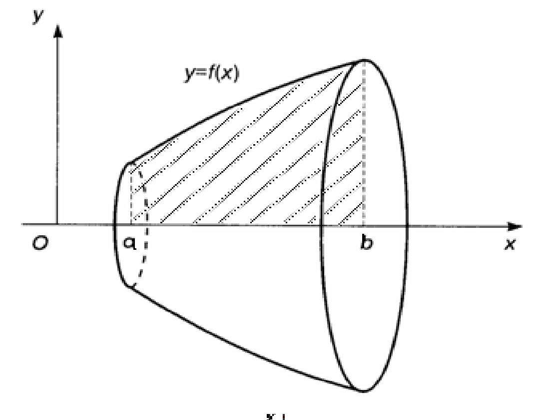
$$S_2 = \int_{-1}^{1}(2x+2)dx = \left(x^2+2x\right)\Big|_{-1}^{1} = (1+2)-(1-2) = 3+1 = 4 \text{ кв.ед.}$$

Тогда, площадь искомой фигуры: $S = S_1 + S_2 = 1 + 4 = 5$ кв.ед.

Ответ: 5 кв. ед.

Задания С помощью определенного интеграла найти площадь фигуры, ограниченной линиями

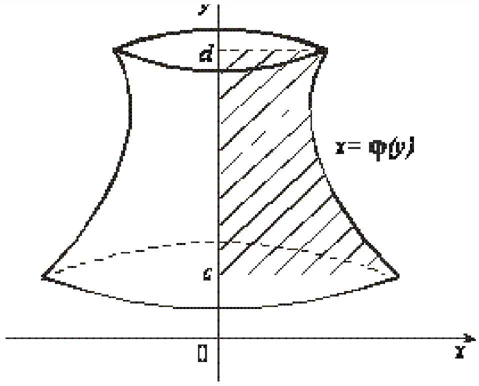
Плоская криволинейная трапеция, прилежащая к оси ***OX***, вращаясь вокруг ос ***OX***, образует тело, объем которого можно вычислить по формуле



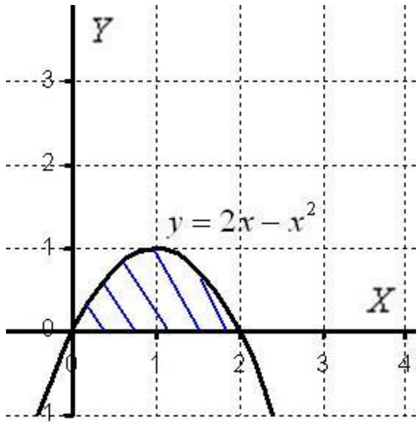
$$V_{OX} = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

Если плоская фигура прилежит к оси ***OY***, то объем тела, полученного вращением этой фигуры около оси ***OY***, определяется по формуле

$$V_{OY} = \pi\int_c^d \left(\varphi(y)\right)^2 dy$$



Пример



Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$, вокруг оси ***OX***.

Решение.

Искомая плоская фигура заштрихована, именно она и вращается вокруг оси ***OX***.

Найдем пределы интегрирования. В данном случае – это точки пересечения графика функции с осью ***OX.***

$2x - x^2 = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

Т.е. $a = 0$, $b = 2$.

Применяя соответствующую формулу, получаем:

$$V = \pi\int_0^2 \left(2x - x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^2 \left(4x^2 - 4x^3 + x^4\right)dx = \pi\left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \pi\left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5}\right) - \pi \cdot 0 = \frac{16\pi}{15}$$

Ответ: $\frac{16\pi}{15}$ куб. ед

Задания для самостоятельной работы

С помощью определенного интеграла найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *OX*, плоской фигуры, ограниченной линиями.

1 вариант	2 вариант
1. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 3$	1. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2$
2. $y = 2x - x^2, \quad y = 0,$	2. $y = x^2 + 1, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$
3. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$	3. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3$
244. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2$	248. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$

7.Критерии оценки

Оценка	Критерии оценки
отлично	студент имеет глубокие знания учебного материала по теме практической работы, показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, самостоятельно выполнил все рекомендации по выполнению практической работе, смог ответить на контрольные вопросы, даёт правильный алгоритм решения задачи, выполнены поставленные цели работы
хорошо	студент показал знание учебного материала, допускает небольшие неточности при выполнении расчетов, смог ответить почти полно на все контрольные вопросы
удовлетворительно	студент в целом освоил материал практической работы, но затрудняется с выполнением всех заданий практической работы без помощи преподавателя, ответил не на все контрольные вопросы
неудовлетворительно	студент имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практическойработы, не может самостоятельно выполнить задания практической работы, не раскрыл содержание контрольных вопросов

8.Форма отчета: Выполните задания на листах

9. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 15

1.Название темыВычисление вероятностей сложных событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

2.Учебные цели: способствовать развитию логического мышления обучающихся при решении задач на вероятности событий.

3. Продолжительность занятия: 2 часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материалметодические рекомендации к практическим занятиям

5. Литература, информационное обеспечение

1 Башмаков М.И. Математика: учеб.для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015.
2 Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб.для студ. учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015
3 Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб.для учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

6.Методические рекомендации по выполнению работы: изучите краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия.

Элементы теории вероятностей.

Испытание – совокупность обстоятельств или действий для достижения определенной цели.

Событие – возможный исход испытания

Пример:

При таком *испытании*, как подбрасывание монеты мы имеем два возможных *события*: монета упадет вверх «орлом» и монета упадет вверх «решкой».

Рассмотрим для конкретного испытания совокупность Ω всех исходов, которые удовлетворяют двум условиям:

1. В результате эксперимента обязательно получится хотя бы один исход изΩ.
2. Никакие два исхода из Ω не могут получиться одновременно в результате данного испытания.

Элементы принадлежащие Ω называются **элементарными событиями**, а само пространство Ω**пространством элементарных событий**.

Пример:

В урне 4 шара: белый, черный, красный, зеленый. *Событие*: из урны вынимают 1 шар. *Пространство элементарных событий* Ω : вынули белый шар; вынули черный шар; вынули красный шар; вынули зеленый шар. Таким образом, Ω состоит из 4-х событий, таких, что в результате эксперимента обязательно произойдет хотя бы одно и никакие два не могут произойти одновременно.

Достоверное событие – само пространство Ω, т.е. событие, которое при испытании обязательно произойдет.

Пример:

В следующую пятницу взойдет солнце. Это пример достоверного события.

Невозможное событие – пустое множество. Событие, не принадлежащее пространству Ω, т.е. которое точно не произойдет.

Пример:

В урне 7 белых и 8 синих шара. Из урны вынули желтый шар. Это пример невозможного события.

Случайное событие – одно или группа элементарных событий из пространства Ω.

Суммой*A+B* двух случайных событий называется событие, которое содержит в себе элементарные события, входящие или в *A*, или в *B*. Т.е. сумма *A+B* наступает тогда, когда наступает хотя бы одно из них

Пример:

Возможные состояния погоды: *A - дождь*, *B - облачно*, *C – ясно*. Событием*A+B* будет состояние погоды, когда *либо дождь, либо облачно*.

Произведением*A·B*двух случайных событий называется событие, которое состоит из элементарных событий, которые находятся и в *A*, и в *B*. Т.е. произведение *A·B* наступает тогда, когда и *A*, и *B* наступают одновременно.

Пример:

Два стрелка производят выстрелы по мишени. События: *A* - первый стрелок попал в цель, *B* – второй стрелок попал в цель, *C* – первый стрелок не попал в цель, *D* - второй стрелок не попал в цель. Событием*A·B* будет событие, когда оба стрелка попали в цель.

Виды случайных событий.

Несовместные события – если наступление одного исключает появление другого.

Пример:

Идет строительство жилого дома. Пусть событие*A* – на стройку 25 июня вышло 95% рабочих, событие *B* – на стройку 25 июня вышло 100% рабочих. Очевидно, что*A* и *B* несовместны.

Совместные события – если наступление одного не исключает появление другого.

Пример:

Два игрока бросают мяч в кольцо. Пусть событиеA – первый игрок попал в кольцо, событие B – второй игрок попал в кольцо. Очевидно, что если первый игрок попал в кольцо, то это не исключает того, что второй тоже может попасть в кольцо.

Противоположные события – если одно из двух событий обязательно должно произойти, причем наступление одного исключает наступление другого. ОбозначимA и $\overline{A}$.Очевидно, что $A+\overline{A}=\Omega$.

Пример:

Стрелок стреляет в цель. Пусть событиеA – стрелок в цель попал, тогда событие $\overline{A}$ – стрелок в цель не попал. Очевидно, что попадание и непопадание – два противоположных события. Также очевидно, что это два возможных исхода испытания, т.е. $A+\overline{A}=\Omega$.

Независимые события – наступление одного события никак не зависит от наступления или ненаступления другого события.

Пример:

Бросают игральный кубик. Пусть событиеA – выпало 3, событие B – выпало 5. Очевидно, что то, какой гранью выпадет кубик не зависит от того какой гранью он выпал до этого. Т.е. события A и B независимые.

Классическое определение вероятности

Обозначим

$|\Omega|$ - общее число исходов

$|A|$- число исходов, благоприятствующих появлению события A.

Тогда **вероятность появления события**A будет определяться формулой

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$$ – *классическая вероятность*

Пример:

В урне лежат 10 шаров. Из них 3 красные, а 7 желтые. Из урны вынимают наугад один шар. Какова вероятность того, что он будет желтым?

Решение.

Пусть событиеA – вытащили желтый шар.
Общее число возможных исходов – очевидно, 10, т.к. в урне 10 шаров, значит вытащить шар можно 10 раз. Значит, $|\Omega|=10$.

Число исходов, благоприятствующих тому, что вытащат желтый шар 7, т.к. в урне 7 желтых шаров. Значит, $|A|=7$.

Тогда вероятность появления событияA (т.е. вероятность того, что вытащат именно желтый шар) вычисляется по формуле классической вероятности:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{7}{10}=0.7$$

Свойства вероятности

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(A) = 0$, тогда и только тогда, когда A – невозможное событие.
3. Для любого событияA $P(\overline{A})=1-P(A)$
4. ЕслиA и B несовместимы, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$
5. ЕслиA и B независимы, то $P(A\cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

Пример 1.Студент не успел выучить 3 билета из 30. Какова вероятность, что он сдаст экзамен?
Решение. По определению вероятности: p = k / n, где k — число благоприятных событий (исходов), n — общее число событий (исходов).k = 30 - 3 = 27, n = 30. Тогда искомая вероятность p = 27 / 30 = 0,9
Второй способ: 3 / 30 = 0,1 — вероятность, что студент не сдаст экзамен, тогда вероятность, что сдаст 1 – 0,1 = 0,9.
Пример 2.Какова вероятность, стоя с закрытыми глазами перед географической картой мира, выбрать точку на суше, показав на нее указкой, если площадь суши 149,1 млн. км^2, а площадь океанов 361,1 млн. км^2?
Решение. Надо знать какую часть всей площади Земли занимает суша. 149,1 + 361,1 = 510,2 млн. км^2. Отношение этих площадей и даст искомую вероятность: 149,1 : 510,2 = 0,29.
Геометрическое определение вероятности. P(A) = S(A) / S(G), где G — произвольная область, A — любая подобласть области G.
Операции с вероятностями

1. **Сложение вероятностей.** Событие $A \cap B$ наступает, если наступают оба события A и B одновременно.

Пусть A и B — два события одного случайного опыта. Рассмотрим те элементарные события, которые благоприятствуют событию A, и те элементарные события, которые благоприятствуют событию B. Все вместе эти элементарные события благоприятствуют новому событию, которое называется **объединением событий *A* и *B***.

Событие $A \cup B$ наступает, если наступает **хотя бы** одно из событий A или B. Это означает, что наступает либо A, либо B, либо A и B вместе.

Пусть A и B — два события одного случайного опыта. Рассмотрим элементарные события, которые благоприятствуют и событию A и событию B. Все вместе эти элементарные события благоприятствуют новому событию, которое называется **пересечением событий *A* и *B***.

Если события A и B не имеют общих благоприятствующих элементарных событий, то они не могут наступить одновременно в ходе одного и того же опыта (еще говорят взаимоисключающие). Такие события называют **несовместными**, а их пересечение — пустое событие.

А) Если события A и B несовместны, то $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$
Б) Если A и B — любые события, то $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Пример 3.Мишень представляет три области. Для данного стрелка вероятность попасть в первую область 0,15, во вторую — 0,25, в третью — 0,4.
а) Какова вероятность стрелку попасть с первого выстрела в какую-нибудь из трех областей?
б) Какова вероятность промазать с первого выстрела?
Решение.
а) Одновременно попасть в две (три) области при одном выстреле нельзя, т.е. имеем дело с несовместными событиями, поэтому $P = P1 + P2 + P3 = 0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}4 = 0{,}8$.
б) Событие «промазать» противоположно событию «попасть куда-нибудь». Поэтому $\overline{P} = 1 – P = 1 – 0{,}8 = 0{,}2$.
Пример 4.Игральную кость бросают дважды. Какова вероятность, что оба раза выпало разное число очков?
Решение. Событие A состоит в том, что в первый раз выпало больше очков, чем во второй. Событие B состоит в том, что во второй раз выпало больше очков, чем в первый.

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

Выделим в таблице элементарные события, благоприятствующие A (15 штук) розовым цветом, а B (15 штук) — голубым. Общее число элементарных событий 36. $P(A) = P(B) = 15/36 = 5/12$Общих элементарных событий у событий A и B нет, т.е. события A и B несовместны, тогда$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 5/12 + 5/12 = 10/12 = 5/6$Второй способ: Обозначим $\overline{A \cup B}$ событие «оба раза выпало одинаковое число очков», являющееся противоположным событию $A \cup B$. Ему соответствуют 6 не закрашенных ячеек таблицы. $P(\overline{A \cup B}) = 6/36 = 1/6$. Тогда $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 – 1/6 = 5/6$.

2. **Умножение вероятностей.**
Случайный выбор — это выбор наудачу одного предмета из группы предметов.

Выбор наудачу — это разновидность случайного опыта с равновозможными элементарными событиями. Элементарным событием в таком опыте является извлечение одного предмета из группы. Если в группе N предметов, то каждый из них может быть выбран с вероятностью $1/N$. После выбора одного предмета случайный выбор можно продолжить, выбрав второй, третий и т. д. предметы или сразу взять наудачу нужное количество предметов. Собранную таким образом группу называют **случайной выборкой**.

Независимые события — это события, которые не связаны друг с другом, т.е. по наступлению одного из них нельзя судить о вероятности другого. Например, при бросании двух костей результат бросания первой кости не влияет на результат бросания второй. Если события A и B независимы, то $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$.

*Пример 5.*Какова вероятность, что при бросании двух игральных костей выпадут две шестерки.

Решение. Пусть событие A — «на первой кости выпала шестерка», событие B — «на второй кости выпала шестерка», заметим, что $P(A) = P(B) = 1/6$. Общее число элементарных событий 36. Выпадение двух шестерок — новое событие, являющееся пересечением независимых событий A и B. $P(A \cap B) = 1/36$. Получаем, что $P(A \cap B) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36 = P(A) \cdot P(B)$.

Пример 6.Бросают две игральные кости. Какова вероятность, что на первой кости выпало более трех очков, а на второй — менее трех?

Решение.Событие A состоит в том, что «на первой кости выпало более 3 очков», а событие В, что «на второй кости выпало меньше 3 очков».

1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

Выделим в таблице элементарные события, благоприятствующие A (18 штук) розовым цветом, а B (12 штук) — голубым, а события, благоприятствующие и A и B (6 штук) — зеленым. Общее число элементарных событий 36.$P(A) = 18/36 = 1/2$; $P(B) = 12/36 = 1/3$, $P(A \cap B) = 6/36 = 1/6$.Т.к. события A и B независимые, то $P(A \cap B) = 1/2 \cdot 1/3 = 1/6 = P(A) \cdot P(B)$.

<u>Задачи для практической работы № 8</u>

1.Какова вероятность выпадения трех шестерок подряд при бросании кости?

2.В фирме такси в данный момент свободно 15 машин: 2 красных, 9 желтых и 4 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшихся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет желтое такси.

3.В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.

4.Ученика попросили назвать число от 1 до 100. Какова вероятность того, что он назовет число кратное пяти?

5.В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Найти вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными.

6.В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

7.В Корзине 8 шаров: 3 белых и 5 черных. Какова вероятность, что вынутые наугад два шара окажутся: а) белые, б) черные,в) одного цвета.

8. Прибор состоит из двух элементов, работа ющих независимо. Вероятность выхода из строя первого элемента равна 0,2; вероятность выхода из строя второго элемента равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) оба элемента выйдут из строя; б) оба элемента будут работа ть.

Контрольные вопросы:

1. Что такое случайное событие?
2. Что такое элементарное событие?
3. Что такое независимые события?
4. Что такое вероятность случайного события. Запишите формулу вероятности случайного события?
5. Перечислите операции с вероятностями.

7.**Критерии оценки**

Оценка	**Критерии оценки**
отлично	студент имеет глубокие знания учебного материала по теме практической работы, показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, самостоятельно выполнил все рекомендации по выполнению практической работе, смог ответить на контрольные вопросы, даёт правильный алгоритм решения задачи, выполнены поставленные цели работы
хорошо	студент показал знание учебного материала, допускает небольшие неточности при выполнении расчетов, смог ответить почти полно на все контрольные вопросы
удовлетворительно	студент в целом освоил материал практической работы, но затрудняется с выполнением всех заданий практической работы без помощи преподавателя, ответил не на все контрольные вопросы
неудовлетворительно	студент имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практическойработы, не может самостоятельно выполнить задания практической работы, не раскрыл содержание контрольных вопросов

8.Форма отчета: Выполните задания на листах

9. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 16

1.Название темыФормула полной вероятности и формула Бернулли.

2.Учебные цели: отработка навыков нахождения полной вероятности и использования формулы Бернулли

3. Продолжительность занятия: 2 часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материалметодические рекомендации к практическим занятиям

5. Литература, информационное обеспечение

1 Башмаков М.И. Математика: учеб.для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015.
2 Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб.для студ. учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015
3 Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб.для учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

6.Методические рекомендации по выполнению работы: изучите краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия.

Основные понятия.

1 Формула полной вероятности: Вероятность события A, которое может произойти совместно с одной из гипотез H_1, H_2,…, H_n, образующих полную группу несовместных событий ($\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$) равна сумме произведений вероятностей каждой из этих гипотез на соответствующие им условные вероятности событияA: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)$.

2 Формула Байеса: Вероятность гипотезы при условии, что событие А произошло, равна произведению вероятности этой гипотезы на соответствующую ей условную вероятность события А, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность события А.

$$P\left(H_i/A\right) = \frac{P(H_i) \cdot P\left(A/H_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P\left(A/H_i\right)}$$

3 Если производится n независимых опытов в каждом из которых событие А появляется с одинаковой вероятностью p, тогда вероятность того, что событие А появится ровно m раз определяется по формуле: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, где $q = 1 - p$

Примеры решения заданий:

1 Каждый из двух стрелков независимо друг от друга произвел выстрел по некоторому объекту. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,7; вторым – 0,6. Объект поражен одним попаданием. Определить вероятность того, что объект поражен первым стрелком

Решение: Событие A – поражение объекта одним попаданием.

До опыта возможны следующие гипотезы:

H_1 – ни один стрелок не попадет;

H_2 – первый стрелок попадет, второй – нет;

H_3 – второй стрелок попадет, первый – нет

H_4 – оба стрелка попадут;

Вероятности этих гипотез равны:

$P(H_1) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$

$P(H_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28$

$P(H_3) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$

$P(H_4) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42$

Условные вероятности события A при этих гипотезах равны:

$P\left(A/H_1\right) = 0$; $P\left(A/H_2\right) = 1$; $P\left(A/H_3\right) = 1$; $P\left(A/H_4\right) = 0$.

После опыта гипотезы H_1 и H_4 становятся невозможными, а вероятность гипотезы H_2 будет равна $P\left(H_2/A\right) = \dfrac{P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)}{P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right) + P(H_3)\cdot P\left(A/H_3\right)} = \dfrac{0{,}28\cdot 1}{0{,}28+0{,}18} \approx 0{,}61$;

Ответ: вероятность того, что объект поражен первым стрелком, равна 0,61.

2 Для нормальной работы линии должно быть не менее 8 автобусов, а их имеется 10. Вероятность невыхода каждого автобуса на линию равна 0,1. Найти вероятность нормальной работы в ближайший день.

Решение: Т.к. для нормальной работы надо 8 автобусов из 10, или 9 из 10, или 10, а вероятность выхода каждого автобуса $p = 1 - q = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$. Вероятность нормальной работы – это сумма вероятностей:

$$P(A)=C_{10}^{8}p^{8}q^{10-8}+C_{10}^{9}p^{9}q^{10-9}+C_{10}^{10}p^{8}q^{10-8}=$$

$$=\frac{10!}{8!\cdot 2!}(0{,}9)^{8}(0{,}1)^{2}+\frac{10!}{9!\cdot 1!}(0{,}9)^{9}(0{,}1)+\frac{10!}{10!\cdot 0!}(0{,}9)^{10}(0{,}1)^{0}\approx$$

$$\approx\frac{9\cdot 10}{2}0{,}43\cdot 0{,}01+10\cdot 0{,}39\cdot 0{,}9+0{,}35\approx$$

$$\approx 0{,}19+0{,}39+0{,}35=0{,}93$$

Ответ: $P(A)=0{,}93$

Задачи для самостоятельного решения:

1 В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе №1, 20 деталей - на заводе № 2 и 18 деталей - на заводе № 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе № 1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах № 2 и № 3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется отличного качества

2 Монету подбрасывают 6 раз. Какова вероятность того, что она упадет «гербом» вверх не больше 3 раз.

3 Игральная кость бросается 20 раз. Определить вероятность того, что 3 очка выпадут 7 раз

4 В магазин поступили электрические лампочки одного типа, изготовленные на четырех заводах: с первого завода - 250 шт.; со второго - 525 шт.; с третьего - 275 шт. и с четвертого - 950 шт. Вероятность того, что лампочка прогорит более 1 500 часов, для первого завода равна 0,15, для второго - 0,30; для третьего - 0,20 и четвертого - 0,10. При раскладке по полкам магазина лампочки были перемешаны. Какова вероятность того, что купленная лампочка прогорит более 1 500 часов?

5 Некоторое изделие выпускают тремя заводами. Объем продукции, поставляемый вторым предприятием, в 2 раза превышает соответствующие объемы продукций первого и третьего предприятий. Доля брака в среднем составляет на первом предприятии 5%, на втором - 20%, а на третьем - 10%. В продажу поступила партия данного изделия. Купленное изделие оказалось бракованным. Какова вероятность того, что оно было выпущено третьим предприятием?

Контрольные вопросы:

1. Что называется формулой полной вероятности?
2. Что такое элементарное событие?
3. Что такое независимые события?
4. Что такое вероятность случайного события. Запишите формулу вероятности случайного события?

7.**Критерии оценки**

Оценка	Критерии оценки
отлично	студент имеет глубокие знания учебного материала по теме практической работы, показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, самостоятельно выполнил все рекомендации по выполнению практической работе, смог ответить на контрольные вопросы, даёт правильный алгоритм решения задачи, выполнены поставленные цели работы
хорошо	студент показал знание учебного материала, допускает небольшие неточности при выполнении расчетов, смог ответить почти полно на все контрольные вопросы
удовлетворительно	студент в целом освоил материал практической работы, но затрудняется с выполнением всех заданий практической работы без помощи преподавателя, ответил не на все контрольные вопросы
неудовлетворительно	студент имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практическойработы, не может самостоятельно выполнить задания практической работы, не раскрыл содержание контрольных вопросов

8.Форма отчета: Выполните задания на листах

9. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.

Практическое занятие 17

1.Название темыСоставление статистического распределения выборки, построение полигона и гистограммы.

2.Учебные цели: отработка навыков вычисления статистического распределения выборки, построение полигона и гистограммы.

3. Продолжительность занятия: 2 часа.

4. Материалы, оборудование, ТСО, программное обеспечение, оснащение, раздаточный материалметодические рекомендации к практическим занятиям

5. Литература, информационное обеспечение

1 Башмаков М.И. Математика: учеб.для начального и сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд. испр. – М.:Академия,2015.
2 Башмаков М.И. Математика. Задачник: учеб.для студ. учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015
3 Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб.для учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 5-е изд., стер. – М. : Академия, 2015

6.Методические рекомендации по выполнению работы: изучите краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия.

Элементы математической статистики

Статистические характеристики

Математическая статистика – это раздел в математике, изучающий методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений с целью выявления существующих закономерностей.

для изучения различных общественных и социально-экономических явлений, а также некоторых процессов, происходящих в природе, проводятся статистические исследования. Всякое статистическое исследование начинается с целенаправленного сбора информации об изучаемом явлении или процессе. Этот этап называется этапом статистического наблюдения.

Таблица

Для обобщения и систематизации данных, полученных в результате статистического наблюдения, их по какому-либо признаку разбивают на группы, и результаты группировки сводятся в таблицы.

Пример 1. В ходе административной проверки выпускных классов, по математике был составлен тест, содержащий 10 заданий. При проверке каждой работы учитель отмечал количество заданий, верно выполненных

учащимися. Получилось два ряда чисел:
9 «а» класс: 8; 7; 2; 5; 3; 9; 8; 7; 7; 10; 3; 6; 5; 8; 8; 10; 9; 4; 10; 7; 9; 2; 7; 9; 6
9 «б» класс: 8; 7; 8; 6; 9; 9; 7; 8; 7; 9; 9; 6; 5; 8; 7; 10; 9; 10; 10; 7; 8; 9; 7; 9; 9

ряд чисел, полученный в результате статистического исследования, называется статистической выборкой или просто выборкой, а каждое число этого ряда – вариантой выборки. Количество чисел в ряду называют объемом выборки (в нашем случае объем выборки равен 25).

запись результатов наблюдений в таком виде мало наглядна, занимает много места, и из нее трудно делать выводы. Это особенно важно, когда число наблюдений велико и достигает многих сотен, а то и тысяч. Для этого полученные данные представим в виде таблицы, в которой в первой строке запишем всевозможные количества баллов, которые могли получить учащиеся при выполнении теста, то есть от 0 до 10. Во второй строке запишем соответствующее количество появлений одного и того же варианта. Такую таблицу называют таблицей частот.

Имея только две выборки, трудно сравнить успешность выполнения заданий теста учащимися этих двух классов или получить какую- либо другую информацию. При проведении статистического исследования после сбора и группировки данных переходят к анализу, используя для этого различные обобщающие показатели. Простейшими из них являются такие известные характеристики как среднее арифметическое, мода, медиана, размах.

Проанализируем результаты проведенной работы, используя эти характеристики.

Среднее арифметическое

средним арифметическим выборки называется частное суммы всех вариант выборки и количества вариант.

найдем средний балл, который получили учащиеся 9 «а» и 9 «б» классов в отдельности при выполнении задания.

Для 9 «а» класса: $\dfrac{2\cdot2+3\cdot2+4\cdot1+5\cdot2+6\cdot2+7\cdot5+8\cdot4+9\cdot4+10\cdot3}{2+2+1+2+2+5+4+4+3} = \dfrac{169}{25} = 6{,}76$

Для 9 «б» класса: $\dfrac{5\cdot1+6\cdot2+7\cdot6+8\cdot5+9\cdot8+10\cdot3}{1+2+6+5+8+3} = \dfrac{201}{25} = 8{,}04$

теперь зная средние баллы учащихся 9 «а» и 9 «б» классов, можно сделать выводы, что учащиеся 9 «б» класса в целом написали тест лучше, поскольку 8,04 > 6,76.

Размах

размахом ряда чисел называется разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.

приведенные таблицы позволяют сделать еще несколько полезных выводов о проведенном тестировании. Для первой выборки (результаты учащихся 9 «а» класса) наименьший полученный балл равен 2, наибольший – 10. Результаты всех учащихся класса располагаются между этими числами. Размах выборки равен: 10 – 2 = 8

для второй выборки (результаты учащихся 9 «б» класса) наименьшая варианта равна 5, наибольшая 10. Размах выборки равен: 10 – 5 = 5

это может означать, что в 9 «б» классе собраны учащиеся, знания которых отличаются на небольшую величину, то есть класс по знаниям «более ровный».

Размах выборки находят в том случае, когда существенным для исследования является величина разброса данных в ряду.

Мода

при анализе сведений о заданиях выполненных учениками, нас могут интересовать и другие показатели. Интересно, например, знать, какое количество заданий является типичным для каждого класса, т. Е. Какое число встречается в ряду данных чаще всего. Имея данные о выполнении заданий учащимися в таком виде,

9 «а» класс: 8; 7; 2; 5; 3; 9; 8; 7; 7; 10; 3; 6; 5; 8; 8; 10; 9; 4; 10; 7; 9; 2; 7; 9; 6

9 «б» класс: 8; 7; 8; 6; 9; 9; 7; 8; 7; 9; 9; 6; 5; 8; 7; 10; 9; 10; 10; 7; 8; 9; 7; 9; 9

Ответить на этот вопрос трудно.

поэтому расположим числа каждого ряда следующим образом:

Для 9 «а» класса: 2; 2; 3; 3; 4; 5; 5; 6; 6; 7; 7; 7; 7; 7; 8; 8; 8; 8; 9; 9; 9; 9; 10; 10; 10

Для 9 «б» класса: 5; 6; 6; 7; 7; 7; 7; 7; 7; 8; 8; 8; 8; 8; 9; 9; 9; 9; 9; 9; 9; 9; 10; 10; 10

Теперь нетрудно заметить, что таким числом в первом ряду является 7, а во втором - 9. Эти числа являются модой выборки.

варианта выборки, имеющая наибольшую частоту, является модой выборки.

Моду ряда данных обычно находят тогда, когда хотят выявить некоторый типичный показатель. Ряд чисел может иметь более одной моды или не иметь моды совсем.

Медиана

медианой упорядоченного ряда чисел с нечётным числом членов называется число, записанное посередине, а медианой упорядоченного ряда чисел с чётным числом членов называется среднее арифметическое двух чисел, записанных посередине.

Мы имеем следующие упорядоченные ряды:

Для 9 «а» класса: 2; 2; 3; 3; 4;5; 5; 6; 6; 7; 7; 7; 7; 7; 8; 8; 8; 8; 9; 9; 9; 9; 10; 10; 10

Для 9 «б» класса: 5; 6; 6; 7; 7; 7; 7; 7; 7; 8; 8; 8; 8; 8; 9; 9; 9; 9; 9; 9; 9; 9; 10; 10; 10

в этих рядах расположено 25 чисел в каждом. Нетрудно заметить, что в середине первого ряда расположено число 7, а в середине второго – 8. Говорят, что числа 7 и 8 являются срединными, или иначе медианами. Они будут считаться также медианой исходного ряда данных.

найденные значения характеризует средний показатель ряда. Именно это число может помочь учителю определить фамилии учеников, показавших лучшие знания по проверяемой теме.

Пример 1. найти медиану набора чисел: 9,3,1,5,7.

Решение: запишем числа в порядке возрастания: 1,3,5,7,9.

Вычеркнем 1 и 9, 3 и 7. Оставшееся число 5 и есть медиана. М=5

Пример 2. Найти медиану набора чисел 2,3,3,5,7,10.

Решение: вычеркнем 2 и 10, 3 и 7. Для нахождения м нужно: (3+5)/2= 4. М=4

Пример 3. В детском обувном магазине за декаду было куплено 750 пар обуви. Кладовщик калошин проводил статистическое исследование и с этой целью записывал размеры каждой пятой из затребованных пар. Эти числа составили следующий ряд данных: 23, 24, 16, 21, 18, 17, 20, 23, 18, 16, 19, 18, 22, 19, 21, 17, 24, 15, 23, 19, 16, 22, 18, 24, 19, 17, 22, 19, 15, 23, 21, 23, 19, 23, 17, 22,16, 19, 22, 18, 20, 15, 21, 23, 19, 18, 23, 22, 20, 17, 19, 23, 21, 24, 22, 23, 20, 22, 21, 18, 16, 19, 22, 23, 20, 24, 21, 19, 24, 16, 20, 23, 24, 18 22, 17, 15, 21, 24, 20, 19, 17, 21, 20, 15, 23, 24, 18, 16, 22, 23, 24, 21, 15, 23, 22, 20, 23, 19, 20, 17, 22, 19, 20, 24, 15, 23, 18, 22, 23, 15, 21, 24, 19, 18, 19, 17, 15, 19, 23, 20, 17, 22, 23, 20, 18, 22, 19, 20, 18, 19, 24, 18, 16, 21, 24, 17, 15, 20, 22, 21, 24, 22, 18, 22, 18, 24, 15, 21.

А) постройте таблицу частот.

Б) определите моду ряда (самый распространенный размер).

В) постройте диаграмму частот.

Г) найдите средний размер по этой выборке.

Решение.

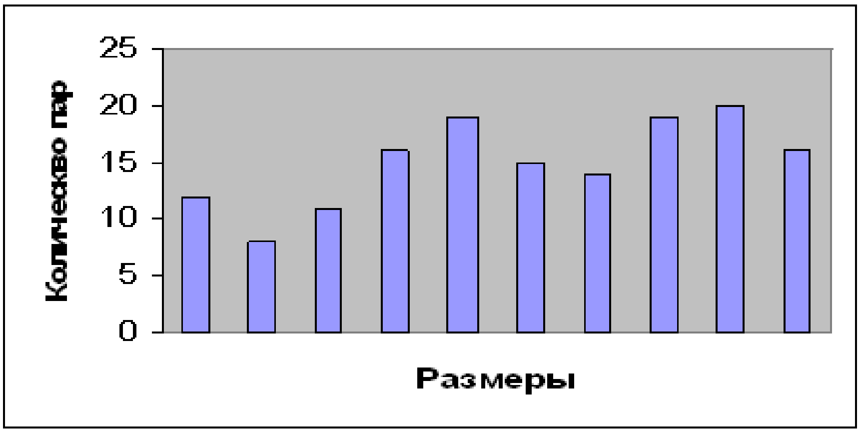
А) сначала при просмотре всей выборки выясним, какие в ней встречаются размеры, и расположим их в порядке возрастания: 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24. Далее подсчитаем количество пар каждого размера в выборке (т.е. Частоту появления каждого размера) и сведем данные в таблицу

Размер обуви	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Частота	12	8	11	16	19	15	14	19	20	16

Подсчеты можно вести с помощью ранжирования ряда.

Б) мода данного ряда – число 23.

В) воспользуемся данными таблицы для построения диаграммы частот, в которой по горизонтальной оси отложены номера имеющихся размеров, по вертикальной оси – количество пар каждого размера.



Г) найдем средний размер. Для этого сначала вычислим сумму всех членов ряда: 15 ·12 + 16 · 8 + 17· 11 + 18 · 16 + 19 · 19 + 20 · 15 + 21 · 13 + 22 · 19 + 23 · 20 + 24 ·16 = 3000, затем общее количество ленов ряда. Это удобно сделать, сложив частоты: 12 + 8 + 11+ +16 + 19 + 15 + 14 + 19 + 20 + 16 = 150, далее, разделив первый результат на второй, получим средний размер: 3000 / 150= 20.

Числовые характеристики выборки

Выборочное среднее

Для конкретной выборки объема n ее выборочное среднее $\overline{x}$ определяется соотношением

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

Где xi – значение элементов выборки. Обычно требуется описать статистические свойства произвольных случайных выборок, а не одной из них. Это значит, что рассматривается математическая модель, которая предполагает достаточно большое количество выборок объема n. В этом случае элементы выборки рассматриваются как случайные величины xi, принимающие значения xi с плотностью вероятностей f(x), являющейся плотностью вероятностей генеральной совокупности. Тогда выборочное среднее также является случайной величиной $\overline{X}$ равной

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Как и ранее будем обозначать случайные величины прописными буквами, а значения случайных величин – строчными.
Среднее значение генеральной совокупности, из которой производится выборка, будем называть генеральным средним и обозначать mx. Можно ожидать, что если объем выборки значителен, то выборочное среднее не будет заметно отличаться от генерального среднего. Поскольку выборочное

среднее является случайной величиной, для нее можно найти математическое ожидание:

$$M(\overline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_x = m_x .$$

Таким образом, математическое ожидание выборочного среднего равно генеральному среднему. В этом случае говорят, что выборочное среднее является несмещенной оценкой генерального среднего. В дальнейшем мы вернемся к этому термину. Так как выборочное среднее является случайной величиной, флуктуирующей вокруг генерального среднего, то желательно оценить эту флуктуацию с помощью дисперсии выборочного среднего. Рассмотрим выборку, объем которой n значительно меньше объема генеральной совокупности n (n << n). Предположим, что при формировании выборки характеристики генеральной совокупности не меняются, что эквивалентно предположению n = ∞. Тогда

$$D(\overline{X}) = M(\overline{X}^2) - (M(\overline{X}))^2 = M\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} X_i X_i\right) - m_x^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} M(X_i X_i) - m_x^2 .$$

Случайные величины xi и xj (i≠j) можно считать независимыми, следовательно,

$$M(X_i X_i) = \begin{cases} m_x^2 \quad , & i \ne j \\ M(X^2), & i = j \,. \end{cases}$$

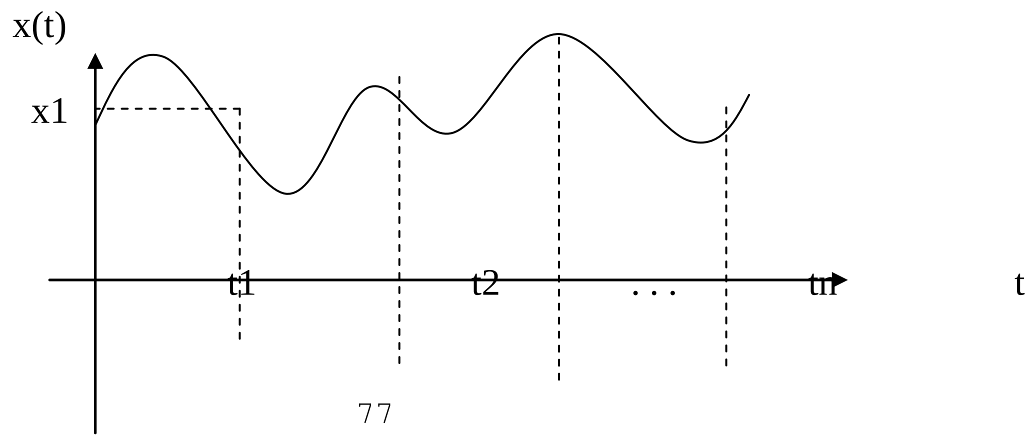
Подставим полученный результат в формулу для дисперсии:

$$D(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}((n^2 - n)m_x^2 + nM(X^2) - n^2 m_x^2) = \frac{n}{n^2}(M(X^2) - m_x^2) = \frac{1}{n}\sigma^2 ,$$

Где σ2 – дисперсия генеральной совокупности.

Из этой формулы следует, что с увеличением объема выборки флуктуации среднего выборочного около среднего генерального уменьшаются как σ2/n. Проиллюстрируем сказанное примером. Пусть имеется случайный сигнал с математическим ожиданием и дисперсией соответственно равными mx = 10, σ2 = 9.

Отсчеты сигнала берутся в равноотстоящие моменты времени t1, t2, ... ,



Так как отсчеты являются случайными величинами, то будем их обозначать x(t1), x(t2), . . , x(tn).
Определим количество отсчетов, чтобы среднее квадратическое отклонение оценки математического ожидания сигнала не превысило 1% его математического ожидания. Поскольку mx = 10, то нужно, чтобы $D(\overline{X}) \le (10 \cdot 10^{-2})^2 = 0{,}01.$ с другой стороны $D(X) = \frac{\sigma^2}{n}$, поэтому $\frac{\sigma^2}{n} \le 0{,}01$ или $\frac{9}{n} \le 0{,}01.$ отсюда получаем, что $n \ge 900$ отсчетов.

Выборочная дисперсия

По выборочным данным важно знать не только выборочное среднее, но и разброс выборочных значений около выборочного среднего. Если выборочное среднее является оценкой генерального среднего, то выборочная дисперсия должна быть оценкой генеральной дисперсии. Выборочная дисперсия $\tilde{\sigma}_n^2$ для выборки, состоящей из случайных величин $X_i\ (i = \overline{1, n})$, определяется следующим образом

$$\tilde{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

Используя это представление выборочной дисперсии, найдем ее математическое ожидание

$$M(\tilde{\sigma}_n^2) = M(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2) = M(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j)^2) =$$

$$= \frac{1}{n}M(\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - \frac{2}{n}X_i\sum_{j=1}^{n}X_j + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}X_jX_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X^2) - \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M(X_iX_j) +$$

$$+ \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}M(X_jX_k) = M(X^2) - \frac{1}{n^2}((n^2 - n)(M(X))^2 + nM(X^2)) =$$

$$= \frac{n^2M(X^2) - n^2(M(X))^2 + n(M(X))^2 - nM(X^2)}{n^2} = \frac{n^2\sigma^2 - n\sigma^2}{n^2} = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Таким образом мы получили, что $M(\tilde{\sigma}_n^2) \ne \sigma^2.$ это значит, что выборочная дисперсия является смещенной оценкой генеральной дисперсии. Чтобы получить несмещенную оценку, нужно величину $\tilde{\sigma}_n^2$ умножить на $\frac{n}{n-1}$, тогда выборочная дисперсия имеет вид

$$\sigma_n^2 = \tilde{\sigma}_n^2\frac{n}{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

Итак, мы получили следующий результат. Если в результате n независимых измерений случайной величины x с неизвестным математическим ожиданием и дисперсией нам нужно по полученным данным определить эти параметры, то следует пользоваться следующими приближенными оценками

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

В случае, если известно математическое ожидание генеральной совокупности mx, то выборочную дисперсию следует вычислять по формуле

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n}(X_i - m_x)^2,$$

которая также является несмещенной оценкой.

6.3. Статистический ряд. Статистическая функция распределения

Пусть имеются результаты измерения случайной величины x с неизвестным законом распределения, которые представлены в виде таблицы:

i	1	2	. . .	n
xi	x1	x2	. . .	xn

Такую таблицу называют статистическим рядом. Статистический ряд представляет собой первичную форму записи статистического материала и он может быть обработан различными способами. Одним из таких способов обработки является построение статистической функции распределения случайной величины x.

Статистической (эмпирической) функцией распределения f*(x) называется закон изменения частоты события x < x в данном статистическом материале, то есть

$$F^*(x) = \frac{\text{число}\, x_i < x}{n}.$$

Для того, чтобы найти значение статистической функции распределения при данном x, надо подсчитать число опытов, в которых случайная величина x приняла значения меньше, чем x, и разделить на общее число произведенных опытов. Полученная таким образом статистическая функция распределения является очень грубым приближением функции распределения f(x) случайной величины x и в таком виде не используется на практике. Она носит в каком-то смысле качественный характер, из которого можно выдвинуть гипотезу о законе распределения случайной величины x. При увеличении числа опытов ($n \to \infty$) f*(x) по вероятности сходится к f(x). Однако, с увеличением n построение f*(x) становится очень трудоемкой операцией. Поэтому на практике часто бывает удобно пользоваться статистической характеристикой, которая приближается к плотности распределения.

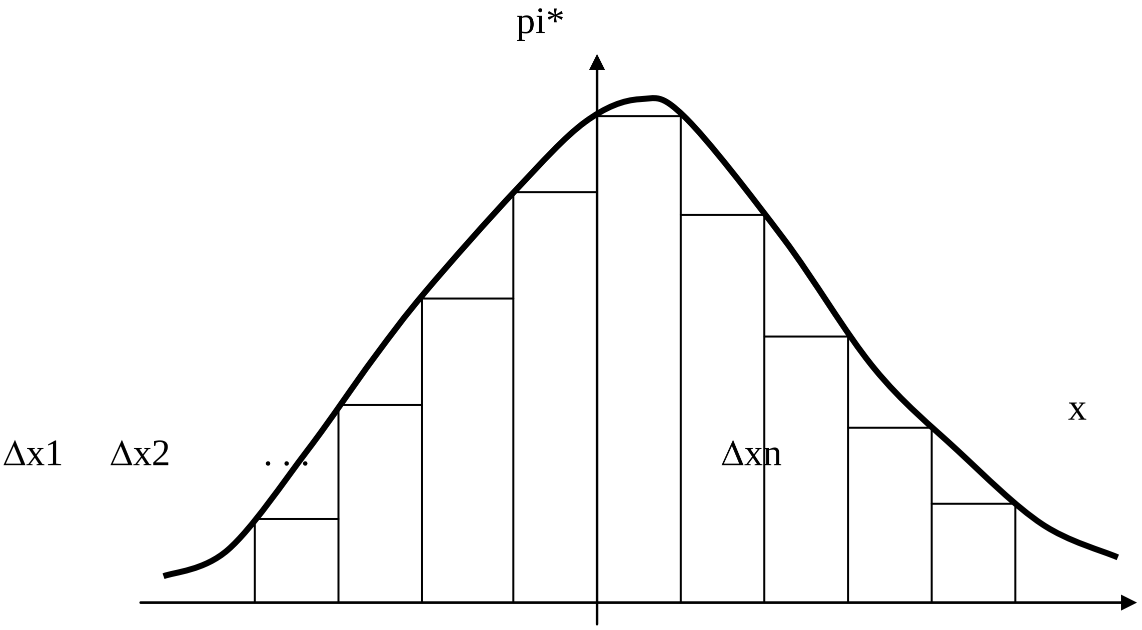
Статистическая совокупность. Гистограмма

При большом числе наблюдений представление данных в виде статистического ряда бывает затруднительным, а при решении ряда задач и нецелесообразным. В таких случаях производится подсчет результатов наблюдения по группам и составляют таблицу, в которой указываются группы и частоты полученные в результате наблюдения в каждой группе. Совокупность групп, на которые разбиваются результаты наблюдений и частоты, полученные в каждой группе, составляют статистическую совокупность, которая представлена ниже.

Группа Δx	$\Delta x1$	$\Delta x2$	. . .	Δxn	
Частота относительная	$\omega 1$	$\omega 2$	. . .	ωn	$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$

Графическое представление статистической совокупности носит название гистограммы. Гистограмма строится следующим образом. По оси абсцисс откладываются интервалы, соответствующие группам совокупности, и на каждой из них строится прямоугольник, площадь которого равна частоте данной группы. Из построения следует, что площадь суммы всех прямоугольников равна единице. Очевидно, что если плавно соединить точки гистограммы, то эта кривая будет первым приближением к плотности распределения случайной величине x.

Если число опытов увеличивать и выбирать более мелкие группы (на рисунке маленькие интервалы) в статистической совокупности, то полученная гистограмма все более будет приближаться к плотности распределения случайной величины x. Статистическую совокупность можно использовать и для построения приближенной функции распределения f*(x), выбрав в качестве значений случайной величины граничные значения групп.



Задача 1. Построить полигон частот и эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

Варианты x_i	-3	0	1	4	6	7

Частоты ni	3	6	1	2	5	1

Решение. Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1, n_1); (x_2, n_2);…;(x_k, n_k), где xi – варианты выборки, ni – соответствующие им частоты.

Полигон частот для данного распределения изображен на рисунке 15.

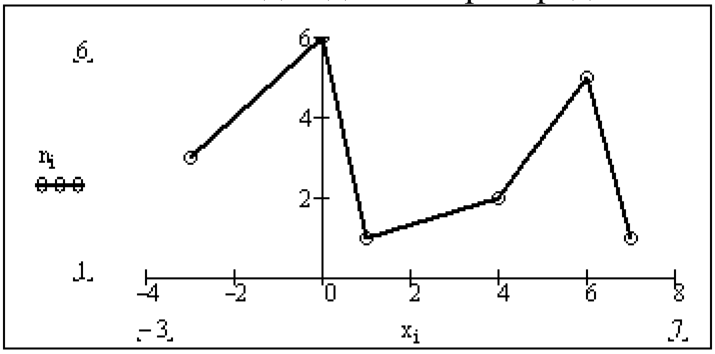


Рис. 15

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

Где n_x – число вариант, меньших x; n – объем выборки.

Из определения следует, что $0 \le F^*(x) \le 1$.

Найдем эмпирическую функцию распределения.

Объем данной выборки равен $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ =18.

Если $x \le -3$, то $F^*(x)$=0 (так как -3 – наименьшая варианта). Если $-3 < x \le 0$, то значение $X < 0$, а именно $x_1 = -3$ наблюдалось 3 раза, следовательно, $F^*(x) = \frac{3}{18}$. При $0 < x \le 1$ значения $X < 1$, а именно $x_1 = -3$ и $x_2 = 0$ наблюдались 3+6=9 раз, следовательно, $F^*(x) = \frac{9}{18}$.

Аналогично получаем, что при $1 < x \le 4$ функция распределения $F^*(x) = \frac{10}{18}$; при $4 < x \le 6$ функция распределения $F^*(x) = \frac{12}{18}$; при $6 < x \le 7$ функция распределения $F^*(x) = \frac{17}{18}$. Далее, если $x > 7$, то $F^*(x) = 1$ (так как 7 – наибольшая варианта).

Таким образом, эмпирическая функция распределения равна:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -3 \\ 3/18 & \text{при } -3 < x \le 0 \\ 9/18 & \text{при } 0 < x \le 1 \\ 10/18 & \text{при } 1 < x \le 4 \\ 12/18 & \text{при } 4 < x \le 6 \\ 17/18 & \text{при } 6 < x \le 7 \\ 1 & \text{при } x > 7 \end{cases}$$

График полученной эмпирической функции распределения изображен на рисунке 16.

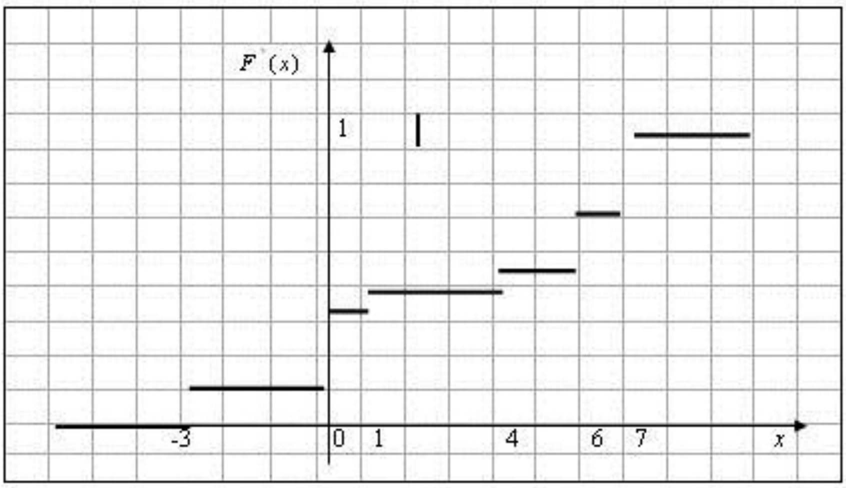


Рис. 16

Задания для самостоятельного решения:

1. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	2	4	6
n_i	10	30	20

2. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	1	3	5
n_i	10	20	30

И построить ее график.

3. Таблица распределения баллов за контрольную работу по математике имеет вид:

Варианта						0	1	2	3	4	5	6	7
Кратность													

По данным таблицы:

Определите моду, размах и среднее значение;

Постройте гистограмму частот

4. На соревновании по фигурному катанию фигурист за произвольную программу получил следующие баллы:

4,8; 4,6; 4,1; 4,6; 4,5; 4,3; 4,6; 4,5; 4,5; 4,3.

А) составьте таблицу распределения данных.

Б) найдите объем выборки, кратность и частоту каждой варианты

5. На детской экспериментальной гидрометеостанции ученик производил замер температуры воздуха в течение 15 дней апреля в одно и то же время и получил следующий ряд значений: 4,1; 4,3; 5,2; 4,5; 5,8; 4,3; 5,2; 3,7; 4,1; 4,5; 4,5; 4,3; 5,2; 5,2 (в °с).

а) составьте таблицу распределения данных и распределения частот.

б) найдите размах, моду и среднее значение.

Контрольные вопросы:

1. Что такое мода?
2. Что такое медиана?
3. Что такое статистический ряд?

7.**Критерии оценки**

Оценка	**Критерии оценки**
отлично	студент имеет глубокие знания учебного материала по теме практической работы, показывает усвоение взаимосвязи основных понятий, используемых в работе, самостоятельно выполнил все рекомендации по выполнению практической работе, смог ответить на контрольные вопросы, даёт правильный алгоритм решения задачи, выполнены поставленные цели работы
хорошо	студент показал знание учебного материала, допускает небольшие неточности при выполнении расчетов, смог ответить почти полно на все контрольные вопросы
удовлетворительно	студент в целом освоил материал практической работы, но затрудняется с выполнением всех заданий практической работы без помощи преподавателя, ответил не на все контрольные вопросы
неудовлетворительно	студент имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала практическойработы, не может самостоятельно выполнить задания практической работы, не раскрыл содержание контрольных вопросов

8.Форма отчета: Выполните задания на листах

9. Место проведения самоподготовки: читальный зал библиотеки.